LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Autora: Ana Lorente

Revisora: Irene García Saavedra

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

1. POTENCIAS

2. OPERACIONES CON POTENCIAS Y PROPIEDADES

3. RAÍCES

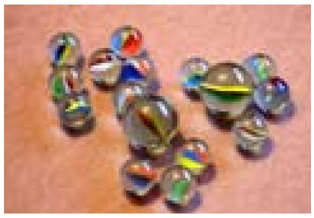
Para trabajar con números muy grandes, para calcular la superficie de una habitación cuadrada o el volumen de un cubo nos va a resultar útil a usar las potencias. En este capítulo repasaremos como operar con ellas.

Si conocemos la superficie de un cuadrado o el volumen de un cubo y queremos saber cuál es su lado utilizaremos las raíces. En este capítulo revisaremos lo que ya conoces para poder usarlas con algo de soltura.

Arquímedes, en su tratado *El arenario* cuenta una manera para expresar números muy grandes, como el número de granos de arena que hay en toda la Tierra. Es, efectivamente, un número muy grande, pero no infinito. Imagina que toda la Tierra está formada por granos de arena. Puedes calcular su volumen conociendo su radio que es de 6500 km. Estima cuántos granos de arena caben en 1 mm^3. Estima que, por ejemplo, caben 100 granos. ¡Ya sabes calcular cuántos hay! Pero en este capítulo aprenderás a escribir ese número tan grande.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

1. POTENCIAS



Recuerda que:

Ya conoces las potencias. En este apartado vamos a revisar la forma de trabajar con ellas.

1.1. Concepto de potencia. Base y exponente

Ejemplo:

- Juan guarda 7 canicas en una bolsa, cada 7 bolsas en una caja y cada 7 cajas en un cajón. Tiene 7 cajones con canicas, ¿cuántas canicas tiene?

Para averiguarlo debes multiplicar 7 x 7 x 7 x 7 que lo puedes escribir en forma de potencia: 7^4, que se lee 7 elevado a 4.

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4 = 2401 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7.$$

exponente

$$7^4 = 2401$$

base

potencia

Una **potencia** es una forma de escribir de manera abreviada una multiplicación de factores iguales. La **potencia** a^n de base un número natural a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \overset{n \text{ factores}}{\ldots\ldots} \cdot a \qquad (n > 0)$$

El factor que se repite es la **base** y el número de veces que se repite es el **exponente**. Al resultado se le llama **potencia.**

Actividades propuestas

1. Calcula mentalmente las siguientes potencias y escribe el resultado en tu cuaderno:

a) 5^2 b) 3^4 c) 10^6 d) 4^3 e) 1^7 f) 1000^3

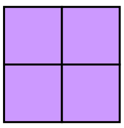
2. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:

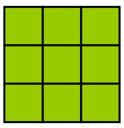
a) 3^7 b) 7^5 c) 2^{10} d) 9^5 e) 25^3 f) 16^4.

1.2. Cuadrados y cubos

Ya sabes que:

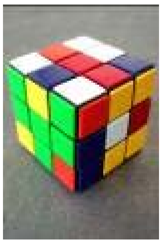
- Si un cuadrado tiene 2 cuadraditos por lado ¿Cuántos cuadraditos contiene ese cuadrado? El número de cuadraditos que caben es $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$. El área de este cuadrado es de 4 unidades. Y si tiene 3 cuadraditos por lado ¿Cuántos cuadraditos contiene ese cuadrado? El número de cuadraditos que caben es $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$. El área de este cuadrado es de 9 unidades.





$100 = 2^2 \cdot 5^2$
es un cuadrado perfecto y su raíz cuadrada es
$2 \cdot 5 = 10$.
$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
es un cuadrado perfecto y su raíz es
$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.
Son cuadrados perfectos.
$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$81 = 3^2 \cdot 3^2$
¿Lo son también 121, 3600 y 900?

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF



¿De cuántos cubitos está compuesto el cubo grande si hay 3 a lo largo, 3 a lo ancho y 3 a lo alto? El número de cubitos es $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$. El volumen de este cubo es 27 unidades.

Recuerda que:

Por esta relación con el área y el volumen de las figuras geométricas, las potencias de exponente 2 y de exponente 3 reciben nombres especiales:

Las potencias de exponente 2 se llaman **cuadrados** y las de exponente 3 se llaman **cubos**.

Actividades propuestas

3. Escribe en tu cuaderno el cuadrado y el cubo de los diez primeros números naturales.

4. Indica cuáles de las siguientes potencias son cuadrados y cuáles son cubos:

a) 7^2 b) 11^2 c) 5^3 d) 5^4 e) 8^2 f) 16^3 g) 10^2

1.3. Lectura de potencias

Recuerda que:

Las potencias se pueden leer de dos maneras:

Ejemplo:

a) Así 3^2 se puede leer 3 elevado a 2 y también se lee 3 al cuadrado.

b) 11^3 se puede leer 11 elevado a 3 y también se lee 11 al cubo.

c) 6^4 se puede leer 6 elevado a 4 y también se lee 6 a la cuarta.

d) 27^5 se puede leer 27 elevado a 5 y también se lee 27 a la quinta.

1.4. Potencias de uno y de cero

Recuerda que:

Una potencia de cualquier base distinta de cero elevada a cero es igual a 1.

Ejemplo:

$$\boxed{5^0 = 1}$$

- $9^0 = 1$ $8725^0 = 1$ $1^0 = 1$.

Uno, elevado a cualquier exponente, es igual a 1.

Ejemplo:

$$\boxed{1^{37} = 1}$$

- $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ $1^{35} = 1$ $1^0 = 1$.

Cero, elevado a cualquier exponente distinto de cero, es igual a 0.

Ejemplo:

$$\boxed{0^{54} = 0}$$

- $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ $0^{35} = 0$.

Observación: 0^0 no se sabe cuánto vale, se dice que es una *indeterminación*.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Actividades propuestas

5. Lee de dos maneras distintas las siguientes potencias:

a) 8^3 b) 3^2 c) 16^4 d) 48^2 e) 4^5 f) 6^6.

6. Calcula mentalmente:

a) 1^{6562} ; b) 0^{8526} c) 9327^0 d) 0^{3782} ; e) 1^{1000} ; f) 9761^0 .

7. Completa la tabla siguiente en tu cuaderno:

a	a^2	a^3	a^4	a^5
2				
	9			
		64		
			1	
				0

1.5. Potencias de 10. Notación científica.

Las potencias de base 10 tienen una propiedad muy particular, son iguales a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente:

Ejemplo:

$10^1 = 10$

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$

$$10^8 = 100\,000\,000$$

¿Sabrías hallar 10^7 sin hacer ninguna operación?

La unidad seguida de ceros es igual a una potencia de 10.

Recuerda que:

Esto nos permite expresar cualquier número en **forma polinómica** usando potencias de 10.

$$8735 = 8 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 = 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5$$

Un número en **notación científica** se expresa como un número distinto de cero, multiplicado por una potencia de base 10.

$$\boldsymbol{a \cdot 10^n}$$

Ejemplo:

- Observa cómo se utiliza la notación científica en los siguientes ejemplos:

a) En la Torre Eiffel hay 2.500.000 remaches = $25 \cdot 10^5$ remaches

b) La masa de la Tierra es:

$$M_T = 5\ 980\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 \text{ g} = 598 \cdot 10^{25} \text{ g}$$

c) La superficie del globo terrestre es de 500 millones de kilómetros cuadrados, luego es igual a: 500.000.000 km^2 = $5 \cdot 10^8$ km^2.

Actividades propuestas

8. Busca los exponentes de las potencias siguientes:

a) $10^{\square}$ = 100.000 b) $10^{\square}$ = 100.000.000 c) $10^{\square}$ =1000.

9. Expresa en forma polinómica usando potencias de 10:

a) 82.345 b) 3.591.825 c) 700.098 d) 2.090.190.

10. Calcula:

a) $3 \cdot 10^6$ b) $5 \cdot 10^8$ c) $2 \cdot 10^4$ d) $34 \cdot 10^5$.

11. Utiliza la **calculadora** para obtener potencias sucesivas de un número. Si marcas un número, a continuación dos veces seguidas la tecla de multiplicar y después la tecla igual obtienes el cuadrado del número.

a) Compruébalo. Marca **8 * * =** , ¿qué obtienes?

b) Continúa pulsando la tecla igual y obtendrás las potencias sucesivas: **8 * * = = =**...

c) Utiliza tu calculadora para obtener las potencias sucesivas de 2.

d) Vuelve a utilizarla para obtener las potencias sucesivas de 31 y anótalas en tu cuaderno.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

2. OPERACIONES CON POTENCIAS Y PROPIEDADES

2.1. Producto de potencias de igual base

Recuerda que:

Para calcular el **producto** de dos o más potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\boxed{7^3 \cdot 7^4 = 7^{3+4} = 7^7}$$

Ejemplo:

- $6^2 \cdot 6^3 = (6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^{2+3} = 6^5$

2.2. Cociente de potencias de igual base

Recuerda que:

El **cociente** de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base y de exponente, la diferencia de los exponentes.

$$a^n : a^m = \text{——} = a^{n-m}$$

$$\boxed{8^7 : 8^4 = 8^{7-4} = 8^3}$$

Ejemplo:

- $3^5 : 3^3 = \text{———} = 3^{5-3} = 3^2$

2.3. Elevar una potencia a otra potencia

Recuerda que:

Para elevar una **potencia** a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\boxed{(9^3)^4 = 9^{3 \cdot 4} = 9^{12}}$$

Ejemplo:

- $(5^5)^3 = (5^5) \cdot (5^5) \cdot (5^5) = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{15}$

Actividades propuestas

12. Aplica las propiedades de las potencias en tu cuaderno:

a) $8^{10} \cdot 8^2$	b) $5^{23} \cdot 5^3$	c) $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^6$	d) $10^5 \cdot 10^7 \cdot 10^9$
e) $(6^3)^2$	f) $(4^2)^4$	g) $(3^0)^6$	h) $(7^3)^2$
i) $9^{10} : 9^2$	j) $3^{23} : 3^3$	k) $11^8 : 11^3$	l) $5^{30} : 5^9$
m) $14^4 : 14^4$	n) $1^{35} : 1^{35}$	o) $7^3 : 7^0$	p) $8^4 \cdot 8^0$

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

13. Te has preguntado por qué un número elevado a 0 es igual a 1. Analiza la siguiente operación:

$$\frac{25}{25}=1 \text{ y también } \frac{25}{25}=\frac{5^2}{5^2}=5^{2-2}=5^0$$

Por ese motivo se dice que todo número distinto de cero elevado a cero es igual a uno.

2.4. Potencia de un producto

Recuerda que:

La potencia de un **producto** es igual al producto de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplo:

- $(6 \cdot 7)^3 = 6^3 \cdot 7^3$.

2.5. Potencia de un cociente

Recuerda que:

La potencia de un **cociente** es igual al cociente de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

Ejemplo:

- $(7 : 9)^3 = 7^3 : 9^3$

2.6. Potencias de números enteros

Recuerda que:

Para calcular la **potencia** de un número entero se multiplica la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

Ejemplo:

- $(+3)^4 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +81$
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Conviene tener en cuenta algunas particularidades que nos ayudan a abreviar el cálculo:

Las potencias de **base positiva** son números positivos.

Las potencias de **base negativa** y exponente **par** son números positivos.

Las potencias de **base negativa** y exponente **impar** son números negativos

$$(+2)^4 = +16$$
$$(-2)^4 = +16$$
$$(-2)^5 = -32$$

Ejemplo:

- $(-4)^2 = +16$
- $(-4)^3 = -64$

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Actividades propuestas

14. Calcula:

a) $(5 \cdot 2)^7$ b) $(64 : 4)^3$.

15. Calcula **mentalmente**

a) $2^3 \cdot 2^3$ b) $3^2 \cdot 3^2$ c) $5^2 \cdot 5^2$

d) $10^{31} \cdot 10^{40} \cdot 10^4 \cdot 10^2$ e) $1^{20} \cdot 1^{27} \cdot 1^{18}$ f) $0^{41} \cdot 0^{86}$.

16. Escribe en forma de una única potencia

a) $7^5 \cdot 7^6 \cdot 7^4$ b) $6^4 \cdot 6^6 \cdot 6^7$ c) $5^{20} \cdot 5^{17}$ d) $8^6 \cdot 2^5 \cdot 2^3$.

17. Calcula **mentalmente**

a) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2$ b) $1^4 \cdot 1^6 \cdot 1^7$ c) $10^{15} \cdot 10^5$ d) $0^2 \cdot 0^6 \cdot 0^{12}$.

18. Calcula **mentalmente**

a) $10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^2$ b) $0^3 \cdot 0^7 \cdot 0^8$ c) $1^{46} \cdot 1^{200}$ d) $5^5 \cdot 2^5$.

19. Escribe en forma de una única potencia y calcula:

a) $2^5 \cdot 5^5$ b) $10^3 \cdot 3^3$ c) $2^6 \cdot 5^6$ d) $10^5 \cdot 5^5$.

20. Escribe en forma de una única potencia:

a) $\dfrac{3^7 \cdot 3^{11} \cdot 3^0}{3^5 \cdot 3^3}$ b) $\dfrac{1{,}6^6 \cdot 1{,}6^{20} \cdot 1{,}6^1}{1{,}6^{15} \cdot 1{,}6^9}$ c) $\dfrac{(2/3)^5 \cdot (2/3)^{15} \cdot (2/3)^2}{(2/3)^{10} \cdot (2/3)^6}$

21. Escribe en forma de una única potencia:

a) $\dfrac{(-3)^7 \cdot (-3)^{11} \cdot (-3)^0}{(-3)^5 \cdot (-3)^3}$ b) $\dfrac{(-1{,}6)^6 \cdot (-1{,}6)^{20} \cdot (-1{,}6)^1}{(-1{,}6)^{15} \cdot (-1{,}6)^9}$ c) $\dfrac{(-2/3)^5 \cdot (2/3)^{15} \cdot (-2/3)^2}{(2/3)^{10} \cdot (-2/3)^6}$

22. Calcula utilizando la calculadora

a) $41^3 \cdot 41^2 \cdot 41$ b) $53^3 \cdot 53^2$ c) $5'2^2 \cdot 5'2$ d) $27^3 \cdot 27$.

23. Calcula utilizando la **calculadora**

a) $58^2 \cdot 58^3 \cdot 58$ b) $23^4 \cdot 23^2$ c) $0'6^3 \cdot 0'6^5$ d) $301^2 \cdot 301$.

24. Calcula utilizando la **calculadora**

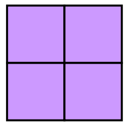
a) $7{,}4^2 \cdot 7{,}4^3 \cdot 7{,}4$ b) $0{,}82^4 \cdot 0{,}82^2$ c) $7{,}35^3 \cdot 7{,}35^5$ d) $0{,}002^2 \cdot 0{,}002$.

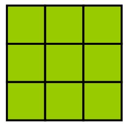
Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

3. RAÍCES

3.1. Cuadrados perfectos

- Si se quiere construir un cuadrado de lado 2, ¿cuántos cuadrados pequeños se necesitan?





Necesitamos 4. El 4 es un **cuadrado perfecto**. Observa que $2^2 = 4$.

- Si queremos construir ahora un cuadrado de lado 3, ¿cuántos cuadrados pequeños necesitamos? Necesitamos 9. El 9 es también un cuadrado perfecto. Observa que $3^2 = 9$.

Ejemplo:

- ¿Cuál es el área de un cuadrado de 7 metros de lado?

Su área vale $7 \cdot 7 = 7^2 = 49$ metros cuadrados.

3.2. Raíz cuadrada. Interpretación geométrica

Recuerda que:

La raíz cuadrada **exacta** de un número *a* es otro número *b* cuyo cuadrado es igual al primero:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Ejemplo:

- Al poder construir un cuadrado de lado 2 con 4 cuadrados pequeños se dice que 2 es la raíz cuadrada de 4, ya que $2^2 = 4$, y por tanto decimos que 2 es la *raíz cuadrada* de 4, es decir:

$$\sqrt{4} = 2.$$

Obtener la raíz cuadrada exacta es la operación opuesta de elevar al cuadrado.

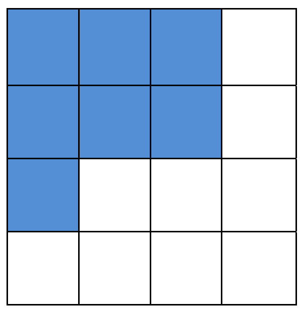
- Por tanto como $3^2 = 9$ entonces $\sqrt{9} = 3$.
- Al escribir $\sqrt{64} = 8$ se dice que la *raíz cuadrada* de 64 es 8.

Al signo √ se le denomina **radical**, se llama **radicando** al número colocado debajo, en este caso 64 y se dice que el **valor de la raíz** es 8.

Ejemplo:

- Sabemos que el área de un cuadrado es 81, ¿cuánto vale su lado?

Su lado valdrá la raíz cuadrada de 81. Como $9^2 = 81$, entonces la raíz cuadrada de 81 es 9. El lado del cuadrado es 9.



Ejemplo:

- ¿Se puede construir un cuadrado con 7 cuadrados pequeños?

Observa que se puede formar un cuadrado de lado 2, pero sobran 3 cuadrados pequeños, y que para hacer un cuadrado de lado 3 faltan 2 cuadrados pequeños.

El número 7 no es un cuadrado perfecto, no tiene raíz cuadrada exacta porque con 7 cuadrados pequeños no se puede construir un cuadrado.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Es más, aquellos números naturales que no tienen raíz cuadrada exacta, su expresión decimal es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas.

Pero podemos afirmar que $2 < \sqrt{7} < 3$.

Como 4 es un cuadrado perfecto y $\sqrt{4} = 2$, y 9 es también otro cuadrado perfecto y $\sqrt{9} = 3$, los números, 5, 6, 7, y 8 no son cuadrados perfectos y su raíz cuadrada es un número irracional.

Con más dificultad se puede aproximar esos valores, así $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$, o podemos obtener más cifras decimales: $2,64 < \sqrt{7} < 2,65$, o bien $2,64575131 < \sqrt{7} < 2,64575132$. Podemos encontrar un valor aproximado de la raíz.

Para calcular raíces cuadradas puedes utilizar la calculadora, con la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$

Es importante conocer los cuadrados perfectos, pues mentalmente, te ayuda a saber entre qué valores enteros está la raíz cuadrada que quieres calcular.

Observa que:

El cuadrado de un número, positivo o negativo, es siempre un número positivo. Luego no existe la raíz cuadrada de un número negativo.

Actividades propuestas

25. Escribe la lista de los 12 primeros cuadrados perfectos.

26. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.

27. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las aproximaciones enteras de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.

28. Indica qué raíces cuadradas van a ser números naturales, cuáles, números irracionales y cuáles no existen:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{100}$.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

3.3. Raíz *n*-ésima de un número

Recuerda que:

- Como $2^3 = 8$ se dice que $\sqrt[3]{8} = 2$ que se lee: *la raíz cúbica* de 8 es 2. El **radicando** es 8, el valor de la **raíz** es 2 y 3 es el **índice**.

$\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

La ***raíz enésima*** de un número *a*, es otro número *b*, cuya potencia enésima es igual al primero.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Ejemplo:

- Por ser $27 = 3^3$, se dice que 3 es la *raíz cúbica* de 27, es decir $\sqrt[3]{27} = 3$.
- Por ser $16 = 2^4$, se dice que 2 es la *raíz cuarta* de 16, es decir $\sqrt[4]{16} = 2$.

Observa que:

Si *n* es un número par, la potencia *n*-ésima de un número, positivo o negativo, es siempre un número positivo, luego no existe la raíz *n*-ésima de un número negativo.

Pero si *n* es un número impar, la potencia *n*-ésima de un número, si puede ser negativa.

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{-27} = -3$ ya que $(-3)^3 = -27$.
- $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = -32$.
- $\sqrt[4]{-16}$ no existe ya que ningún número, elevado a 4, da –16.

3.4. Introducir factores en el radical

Recuerda que:

Para introducir un número dentro del radical se eleva el número al índice de la raíz y se multiplica por el radicando.

Ejemplo:

- $10\sqrt{3} = \sqrt{10^2 \cdot 3} = \sqrt{300}$

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

3.5. Extraer factores del radical

Recuerda que:

Para extraer números de un radical es preciso descomponer el radicando en factores:

Ejemplo:

- $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2^2\sqrt{5}$

3.6. Suma y resta de radicales

Recuerda que:

Decimos que dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Para sumar y restar radicales, estos deben ser semejantes; en ese caso, se operan los coeficientes y se deja el mismo radical.

Cuidado, un error muy común: la raíz de una suma (o una resta) **NO** es igual a la suma (o la resta) de las raíces:

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64+36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$$

Actividades propuestas

29. Calcula mentalmente en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{8}$ e) $\sqrt[3]{1000}$ f) $\sqrt[5]{1}$ g) $\sqrt[3]{0}$.

30. Introducir los siguientes factores en el radical:

a) $2\cdot\sqrt[4]{5}$ b) $10\cdot\sqrt[3]{3}$ c) $2\cdot\sqrt[3]{4}$ d) $5\cdot\sqrt[5]{4}$ e) $3\cdot\sqrt[3]{7}$.

31. Extraer los factores que se pueda del radical:

a) $\sqrt[3]{10000x^9y^3}$ b) $\sqrt[5]{100000}$ c) $\sqrt[4]{81a^8b^6c^4}$ d) $\sqrt[3]{1000\,a^7b^4}$.

32. Calcula:

a) $3\sqrt{8}+5\sqrt{32}-6\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{27}+3\sqrt{3}-2\sqrt{81}$.

CURIOSIDADES. REVISTA

Historia del ajedrez

Cuenta la leyenda que un súbdito enseñó a jugar al ajedrez al príncipe persa Sisso, hijo de Dahir, y le gustó tanto el juego que prometió regalarle lo que pidiera. El súbdito dijo, quiero un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, el doble por la tercera, así hasta llegar a la casilla 64.

A Sisso no le pareció una demanda excesiva, y sin embargo ¡no había trigo suficiente en el reino para pagar eso!

a) ¿Cómo se debe representar el cálculo?

b) ¿Cuántos granos de trigo le dan por la casilla primera? ¿Y por la casilla segunda? ¿Y por la tercera? ¿Y por la suma de las tres primeras casillas?

c) ¿Cuántos granos de trigo corresponden a la casilla 10?

d) ¿Y a la 64? Utiliza la calculadora para intentar calcular ese número, ¿qué ocurre?

El secreto

Al hotel de una pequeña ciudad de unos 1000 habitantes llega un famoso cantante intentando pasar desapercibido.

Cuando va a entrar en su habitación, un empleado cree reconocerle y se apresura a comentarlo con tres compañeros.

Las tres personas al llegar a sus casas (en lo que tardan 10 minutos) hablan con sus vecinos y vecinas, llaman por teléfono a amigos y amigas y cada una cuenta la noticia a otras tres personas.

Éstas a su vez, en los siguientes 10 minutos, cada una de ellas cuenta la noticia a 3 personas.

El rumor pasa de unos a otros, y de esta forma, una hora después la noticia es sabida por ¿cuántas personas?

¿Tiene posibilidades el cantante de pasar desapercibido en alguna parte de la ciudad?

Adivina

a) ¿Cuál es el número mayor que puede escribirse utilizando cuatro unos?

b) ¿Cuál es el número mayor que puede escribirse utilizando cuatro doses?

c) ¿Y cinco doses?

Otros números enormes

Un mosquito hembra pone al día 200 huevos de los que salen hembras, que al cabo de 3 días ya son nuevos mosquitos hembras capaces de poner huevos. Utiliza tu calculadora para ir obteniendo la población de mosquitos hembras: a) Al cabo de 3 días, 200 nuevas hembras, ¿y al cabo de 6 días? ¿Y a los 9 días? ¿Y en un mes (de 30 días)?

Observa en qué poco tiempo tu calculadora empieza a escribir cosas raras. ¡Ya no le cabe ese número tan grande! Tiene un **crecimiento exponencial**. Si los mosquitos no tuvieran enemigos y no tuvieran competencia por los alimentos, pronto ocuparían todo el espacio.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Potencia	Una potencia a^n de base un número real a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base	$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$. 7 es la base y 3 el exponente
Cuadrados y cubos	Las potencias de exponente 2 se llaman cuadrados y las de exponente 3, cubos	7^2 es 7 al cuadrado y 7^3 es 7 al cubo.
Potencias de 1 y de 0	Cualquier número distinto de cero elevado a 0 es igual a 1. El número 1 elevado a cualquier número es igual a 1. El número 0 elevado a cualquier número distinto de cero es igual a 0.	$145^0 = 1$; $1^{395} = 1$; $0^{7334} = 0$.
Potencias de base 10	Una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente. La unidad seguida de ceros es igual a una potencia de 10.	$10^6 = 1.000.000$ $10000000 = 10^7$
Notación científica.	Para escribir un número en notación científica se expresa como un número distinto de cero, multiplicado por una potencia de base 10.	$3\ 000\ 000 = 3 \cdot 10^6$.
Producto de potencias de igual base	Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.	$9^2 \cdot 9^3 = (9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9 \cdot 9) = 9^{2+3} = 9^5$
Cociente de potencias de igual base	Para dividir potencias de igual base, se deja la misma base y se restan los exponentes.	$23^8 : 23^7 = 23^{8-7} = 23^1$
Elevar una potencia a otra potencia	Para calcular la potencia de otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.	$(5^4)^6 = 5^{24}$
Raíz cuadrada	La raíz cuadrada de un número a es otro número b que al elevarlo al cuadrado nos da a.	$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{81} = 9$
Raíz *n*-ésima	$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$	$\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$
Introducir y extraer factores en radicales	$10\sqrt[3]{2} = \sqrt{10^3 \cdot 2} = \sqrt{2000}$	$\sqrt[4]{405} = \sqrt[4]{81 \cdot 5} = 3\sqrt[4]{5}$

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Potencias

1. Escribe en forma de potencias de 10:

a) Un millón b) Un billón c) Una centena de millar

2. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:

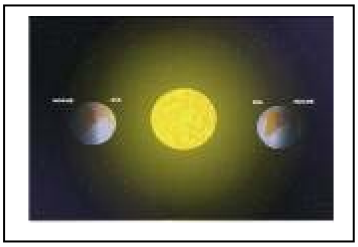
a) 25^0 b) 10^6 c) $5 \cdot 10^4$ d) 2^4 e) 4^2

f) 10^2 g) 10^5 h) 10^{12} i) 10^6 j) 6^3

3. Escribe en tu cuaderno una aproximación de las siguientes cantidades, mediante el producto de un número por una potencia de 10.

a) 600000000 b) 250000000 c) 914000000000

4. Escribe en tu cuaderno una aproximación abreviada de las siguientes cantidades:



a. La distancia de la Tierra al Sol → 150 000 000 km

b. El número de átomos que hay en un gramo de oxígeno.

37643750 000 000 000 000 000 átomos

5. Halla en tu cuaderno:

a) $(2^5 : 2)^3 \cdot 2^4$ b) $(7^4)^2$ c) $6^5 : 3^5$

d) $(9 : 3)^5$ e) $(15 : 5)^3$ f) $(21 : 7)^3$

g) $(75 : 5)^4$ h) $(4 : 2)^5$ i) $8^2 : 2^5$

6. Calcula $(4^3)^2$ y $4^{(3)^2}$ ¿Son iguales? ¿La potenciación tiene la propiedad asociativa?

7. Escribe en tu cuaderno el resultado en forma de potencia:

a) $36 \cdot 6^2$ b) $3^3 \cdot 81$ c) $36 : 6^2$

8. Factoriza y expresa como un producto de potencias de base 2, 3 y 5:

a.) $12^7 : 6^7$ b) $(2^5 \cdot 2^2) : 16$ c) $(5^6 \cdot 36) : 10^4$ d) $(16 \cdot 4^2) : 2^5$

9. Calcula:

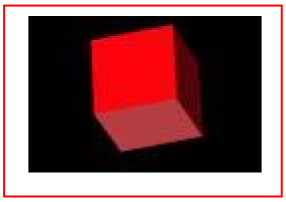
a) $(2 + 3)^2$ y $2^2 + 3^2$ ¿Son iguales?

b) Calcula $6^2 + 8^2$ y $(6 + 8)^2$ ¿Son iguales?

10. Calcula en tu cuaderno:

a) $2^3 + 2^4$ b) $3^5 – 3^4$ c) $5^3 \cdot 5^2$ d) $10^4 \cdot 10^3$ e) $7^4 : 7^2$ f) $10^5 : 10^3$

11. La superficie de la cara de un cubo mide 36 cm cuadrados. ¿Cuál es su volumen?



12. Calcula en tu cuaderno:

a) $(2^3 \cdot 8 \cdot 2^5) : (2^6 \cdot 2^3)$ b) $(5^2 \cdot 5^4 \cdot 5) : (5 \cdot 5^2 \cdot 5)$

13. Calcula 5^3 y 3^5 ¿Son iguales? ¿Se pueden intercambiar la base y el exponente en una potencia? Calcula $5 \cdot 3$ y $3 \cdot 5$ ¿Son iguales?

14. Descompón en factores primos, utilizando potencias: 12; 36; 48; 100; 1000; 144.

15. Efectúa las siguientes operaciones con potencias dando el resultado en forma de potencia de una sola base, la que creas más adecuada en cada caso:

a) $(5^3 \cdot 5^2)^3$ b) $(16^2 : 4^3)^3$ c) $(9^2 : 3^3)^2$

d) $(2^5 : 2^2)^3$ e) $3{,}7^5 \cdot 3{,}7^2$ f) $(2{,}5^5 \cdot 2{,}5^2) : 2{,}5$

16. Efectúa las siguientes operaciones dando el resultado como una única potencia:

a) $(7^{12} \cdot 49^3)^6$ b) $9^4 \cdot 27^2$ c) $(5^{10} \cdot 5^2)^2$

d) $(7^{10} : 7^2)^2$ e) $(9^5 \cdot 81^2)^3$ f) $(6^7 \cdot 36^5)^3$

17. Un campo cuadrado mide 3600 metros cuadrados. ¿Cuántos metros de valla es preciso comprar para vallarlo?

18. ¿A qué número hay que elevar 2^2 para obtener 4^4? ¿Y para obtener 8^8?

19. Dibuja cuadrados de lados 5, 6, 7 y 10 e indica cuántos cuadraditos de lado 1 contienen.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Raíces

20. Halla en tu cuaderno:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{49}$ c) $\sqrt{1}$ d) $\sqrt{0}$

e) $\sqrt{169}$ f) $\sqrt{196}$ g) $\sqrt{36}$ h) $\sqrt{144}$

21. La superficie de un cuadrado es de 1000000 metros cuadrados, ¿Cuánto mide su lado? ¿Y su perímetro?

22. Calcula en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{32}$ b) $\sqrt[3]{1000}$ c) $\sqrt{625}$

d) $\sqrt[4]{81}$ e) $\sqrt[3]{27}$ f) $\sqrt{1000000}$

23. Extrae en tu cuaderno factores de los radicales siguientes:

a) $\sqrt{60}$ b) $\sqrt{250}$ c) $\sqrt[3]{125a^6b^5c^3}$ d) $\sqrt[3]{8a^4b^7c^1}$

e) $\sqrt{49b^5x^8}$ f) $\sqrt[3]{125b^6c^5}$ g) $\sqrt[3]{216b^4x^7}$ h) $\sqrt[4]{81b^5m^9}$

24. Introduce los siguientes factores en el radical:

a) $3x\sqrt{x}$ b) $5\sqrt{100}$ c) $6\sqrt{32}$ d) $4\sqrt{20}$

e) $2\sqrt[3]{3}$ f) $7a\sqrt[3]{3}$ g) $5\sqrt[5]{2^4}$ h) $a\sqrt[3]{5}$

25. Dibuja en tu cuaderno cuadrados de área 36, 49, 64 y 100 unidades.

26. Escribe el signo = o ≠ en el hueco:

a) $\sqrt{64+36}$ $\square$ $\sqrt{64}+\sqrt{36}$. b) $\sqrt{9+16}$ $\square$ $\sqrt{9}+\sqrt{16}$.

27. Halla en tu cuaderno:

a) $9\sqrt{20} + 2\sqrt{80} - 4\sqrt{180}$ b) $30\sqrt{27} + 9\sqrt{3} - 23\sqrt{12}$

c) $5\sqrt{2} - 7\sqrt{8} + 12\sqrt{50}$ d) $6\sqrt{28} - 2\sqrt{63} + 4\sqrt{7}$

28. Calcula en tu cuaderno:

a) $5 \cdot \sqrt{16} - 32 : 2^3 + 2\sqrt{144} + \sqrt{49}$ b) $3 \cdot 10^2 - 5 \cdot \sqrt{64} + 7^0$

c) $5 \cdot 3^2 - 2 \cdot (1 + \sqrt{36}) - 2$ d) $32 : 2^3 - 2 \cdot \sqrt{25} + 2^2$

Problemas

29. Un chalé está edificado sobre una parcela cuadrada de 7 225 m^2 de área. ¿Cuánto mide el lado de la parcela?

30. El hotel de los líos: Un hotel tenía infinitas habitaciones todas ocupadas. Un cliente gracioso se levanta por la noche y abre todas las puertas. Otro cliente se levanta también y cierra las puertas pares. Un tercer cliente se levanta y modifica las puertas que son múltiplos de 3, si están abiertas, las cierra, y si las encuentra cerradas, las abre. Un cuarto cliente lo mismo, pero con las que son múltiplo de 4. Y así toda la noche, todos los clientes. A la mañana siguiente ¿cómo están las puertas? ¿Qué puertas están abiertas?

31. Calcula en kilómetros y notación científica la distancia que hay desde la Tierra al Sol sabiendo que la velocidad de la luz es aproximadamente de 300 000 km/s y que la luz del Sol tarda 8,25 minutos en llegar a la Tierra.

32. Halla el volumen de un cubo de 1,5 m de arista.

33. Una parcela es cuadrada, y la medida de su área es 8 100 m^2. Halla el área de otra parcela cuyo lado sea el doble.

34. La superficie de la cara de un cubo mide 49 cm cuadrados. ¿Cuál es su volumen?

35. Juan hace diseños de jardines con plantas formando cuadrados. Le sobran 4 plantas al formar un cuadrado y le faltan 9 para formar otro con una planta más por lado. ¿Cuántas plantas tiene? Te ayudará a saberlo hacer un dibujo.

36. Manuel tiene una habitación cuadrada. Con 15 baldosas cuadradas más tendría una baldosa más por lado. ¿Cuántas tiene? Te ayudará a saberlo hacer un dibujo.

37. **Arquímedes**, en su tratado *El arenario* contaba una manera para expresar números muy grandes, como el número de granos de arena que hay en toda la Tierra. Es, efectivamente, un número muy grande, pero no infinito. Imagina que toda la Tierra está formada por granos de arena. Puedes calcular su volumen conociendo su radio que es de 6500 km. Recuerda, el volumen de una esfera es $(4/3)\pi r^3$.

a) Calcula el volumen de la Tierra en km^3, y escribe ese volumen en notación exponencial.

b) Pasa el volumen a mm^3, en notación exponencial.

c) Estima cuántos granos de arena caben en 1 mm^3. Supón que, por ejemplo, caben 100 granos.

d) Calcula cuántos caben en toda la Tierra multiplicando el volumen en mm^3 por 100.

e) ¿Has obtenido $1{,}15 \cdot 10^{32}$ granos de arena?

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es el resultado de las tres potencias siguientes $(-2)^4$, $(-4)^3$ y $(-5)^2$

a) –16, –12, 25 b) 16, –64, 25 c) 32, –64, 10 d) –64, –32, –26

2. ¿Cuál es el resultado de la operación $4\cdot10^2 + 5\cdot10^2$?

a) 900 b) $9\cdot10^4$ c) $20\cdot10^2$ d) 500

3. Escribe = (igual) o ≠ (distinto) según corresponda:

a) 3^3 □ 27 b) 1^{35} □ 35 c) 732^0 □ 732 d) 10^5 □ 50

4. ¿Cuál de las respuestas corresponde a la multiplicación $(-3)^3 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5$?

a) $(-3)^{30}$ b) $(-9)^{10}$ c) 3^{10} d) –19683

5. ¿Cuál de las respuestas corresponde a la división $0'7^6 : 0'7^4$?

a) $0'7^2$ b) $0'7^3$ c) $0'7^{10}$ d) 6/4

6. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para la operación $((-5) \cdot (-2) \cdot (-1))^3$

a) –1000 b) –30 c) 100 d) 60

7. Elige la respuesta que corresponda al resultado de $((-0'2)^2)^4$

a) $(0'2)^8$ b) $(-0'2)^6$ c) 0'032 d) –0'0016

8. ¿La raíz cuadrada de 81 vale?

a) 18 b) 8,7 c) 9 d) 3

9. Señala el número que no es cuadrado perfecto:

a) 169 b) 441 c) 636 d) 1024 e) 700

10. El lado de una superficie cuadrada de 196 centímetros cuadrados mide:

a) 19 cm b) 14 cm c) 13 cm d) 17 cm