LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Caro

Revisor: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

En la época de *El Quijote*, en la puerta de las barberías, se leía el siguiente cartel: *"ALGEBRISTA Y SANGRADOR"* ¿Y eso, por qué?

La palabra "*Álgebra*" es una palabra árabe que utilizó el matemático *Al-Khwarizmi*. Si logras leer ese nombre verás que te suena a otra palabra: "*algoritmo*".

Hacia el año 825 escribió un libro titulado: *Al-jabr w'almuqabalah* La palabra árabe *jabr* significa restaurar. El libro trataba de álgebra, de sumas y otras operaciones, pero como los barberos también restauraban huesos, por eso se llamaban algebristas.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

1.1. Letras y números

Ya sabes que:

A nuestro alrededor nos encontramos con multitud de símbolos cuyo significado conocemos, como las señales de tráfico o algunos logotipos.

El **lenguaje algebraico** consigue que podamos expresar mensajes en los que las letras representan variables de valor desconocido. Utiliza letras, números y operaciones para representar una información.

Ejemplo:

- Ya has utilizado el lenguaje algebraico para indicar el área de un rectángulo de base b y altura h: $A = b \cdot h$; la longitud de una circunferencia de radio r: $L = 2\pi r$, por ejemplo.

Para cada situación podemos utilizar la letra que queramos, aunque, cuando hablamos de algo desconocido, la letra más utilizada es la ***x***.

Ejemplo:

- La mitad de la edad de una persona $x/2$
- El doble de un número menos 7 $2x - 7$.

El propio *Al-Khwarizmi* usó originariamente la palabra "*cosa*", (por ejemplo, en lugar de $2x$ decía "*el doble de una cosa*"), que en árabe suena como "*šay*" y que se tradujo al español como "*xei*". De aquí procede la x actual.

Las expresiones que nos permiten reflejar mediante letras y números una situación se llaman **expresiones algebraicas.**

Actividades resueltas

- Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:

El triple de un número	$3x$
El producto de dos números consecutivos	$x \cdot (x + 1)$
La edad de Pedro hace 3 años	$x - 3$
La diferencia de dos números	$a - b$

Actividades propuestas

1. Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:
   a) El triple de un número más su mitad.
   b) La edad de una persona dentro de 10 años.
   c) La sexta parte de un número menos su cuadrado.
   d) La diferencia entre dos números consecutivos.

2. Un mago le propone un juego a Adela: Piensa un número, súmale 7, multiplica el resultado por 2, réstale 10 y réstale el número. Dime qué te sale. Adela dijo 9. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 5. Adivina cómo lo supo el mago.

3. ¿Quieres ser tú ahora el mago? Inventa un juego y escríbelo, para poder adivinar el número pensado.

1.2. Coeficiente y parte literal

Ya sabes que:

Una **expresión algebraica** puede estar formada por uno o varios sumandos que se denominan **términos** o **monomios**. Una suma de monomios es un **polinomio**. En un monomio la **parte literal** son las letras y se llama **coeficiente** al número por el que van multiplicadas.

Ejemplo:

- En la expresión $7x$, el coeficiente es 7 y la parte literal x. En $9xy^2$ el coeficiente es 9 y la parte literal xy^2.

Para poder sumar o restar dos monomios deben ser **semejantes**, es decir, tener igual parte literal.

Ejemplo:

- Suma $9xy^2 + 7xy^2 = 16xy^2$. En cambio no se puede sumar $5x + 3y$ pues no son semejantes

Actividades resueltas

- Señala los coeficientes, las partes literales y el número de monomios de la expresión algebraica:

$$6a - 3b + c + 8$$

Esta expresión algebraica tiene 4 términos o 4 monomios: $6a$, $-3b$, c y 8. Los coeficientes son +6, –3, + 1 y +8 respectivamente. Las partes literales son a, b y c. El último término no tiene parte literal.

- Señala en el polinomio y calcula su suma $8x + 5x - 2x$ cuáles son los coeficientes. Los coeficientes son 8, 5 y –2; su suma es $11x$.

1.3. Valor numérico de una expresión algebraica

Si a las letras de una expresión algebraica se les da un valor concreto, se puede calcular el **valor numérico** de dicha expresión.

Actividades resueltas

- Calcula el valor numérico de la expresión $7x + 3$ cuando x vale 2.

Hay que sustituir en la expresión, x por su valor, 2.
Por tanto: $7 \cdot 2 + 3 = 14 + 3 = 17$, que es el valor numérico cuando x vale 2.

1.4. Equivalencia y simplificación de expresiones algebraicas

La expresión algebraica $5x + 4x$ es equivalente a la expresión $9x$, que es su expresión más simplificada.

Actividades propuestas

4. Señala el coeficiente, la parte literal y el número de términos o monomios de los polinomios siguientes:

a) $3 - 14xy$ b) $2a + 6b - 9c$ c) $6xy + 8$ d) $2xy + 6 - 4y$

5. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios:

a) $6x + 4y$ para $x = 3$, $y = 2$.
b) $2 - 3a$ para $a = -5$.
c) $5a + 9b - 7c$ para $b = -1$, $a = -1$ y $c = +2$.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

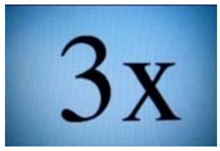
1.5. Polinomios. Suma y producto

Monomios. Polinomios

Unas expresiones algebraicas de gran utilidad son los **polinomios**, cuya versión más simple y, a la vez, generadora de ellos son los **monomios**.

Un **monomio** viene dado por el producto de números e indeterminadas. Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas; la indeterminada, o indeterminadas, conforman la **parte literal** del monomio.

Ejemplos:



- La expresión que nos proporciona el triple de una cantidad, $3\cdot x$, es un monomio con una única variable, x, y coeficiente 3.
- El área del círculo, πr^2, es un monomio con indeterminada, r y coeficiente π. Su parte literal es r^2.

Atendiendo al exponente de la variable, o variables, adjudicaremos un **grado** a cada monomio con arreglo al siguiente criterio:

- Cuando haya una única indeterminada, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.
- Si aparecen varias indeterminadas, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.

Ejemplos:

- $3x$ es un monomio de grado 1 en la variable x.
- πr^2 es un monomio de grado 2 en la indeterminada r.
- $7a^2b^3$ es un monomio de grado 5 en a y b.

Un número puede ser considerado como un monomio de grado 0.

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios. El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios.

Ejemplos:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ es un polinomio de grado 3 en la variable x.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 - 7 + 3\cdot y^2$ es un polinomio de grado 5 en x e y.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ es un polinomio de grado 1 en x, y y z.

Tanto en esta sección nos limitaremos, básicamente, a considerar polinomios con una única variable. Es habitual escribir los diferentes monomios de un polinomio de forma que sus grados vayan en descenso para, con este criterio, apreciar en su primer monomio cuál es el grado del polinomio.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números. El monomio de grado cero, a_0, recibe el nombre de **término independiente**. Diremos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Ejemplos:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ es un polinomio de grado 4 en la variable x, cuyo término independiente es 2.

Actividades propuestas

6. Para cada uno de los siguientes polinomios destaca su grado y los monomios que lo constituyen:

a) $3x^6 + 7x^2 - x$ b) $7x^3 + 8x^5 - 6x^2$ c) $3xy^6 + 7xy^2 - 2xy$

Como ocurre con cualquier expresión algebraica, si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número: el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable. Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número -3 la denotaremos por $p(-3)$, y leeremos *"p de menos tres"* o *"p en menos tres"*. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o $p(x)$ indistintamente.

De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número otro número.

Ejemplos:

- Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ nos encontramos con el número

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

Actividades propuestas

7. Consideremos el polinomio $p(x) = 3x^6 + 7x^2 - x$. Halla los siguientes valores numéricos de p: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(2)$.

Suma de polinomios

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Ejemplos:

- La suma de los polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ y $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ es el polinomio

$$(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + (\frac{1}{5}x^2 + 4x^2) - 5x + (2 - 6) =$$

$$= (-3 - 1) \cdot x^4 + (\frac{1}{5} + 4) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $(5x^2-3x+1)+(x^2+4x-7)=(5x^2+x^2)+(-3x+4x)+(1-7)=6x^2+x-6$

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\ + & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

Producto de polinomios

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la multiplicación.

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella adopta valores numéricos, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto entre números, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$ax^n\cdot bx^m=abx^{n+m}$$

Ejemplos:

- $(-5)x^2\cdot 2x^4=(-5)\cdot 2\cdot x^{2+4}=-10x^6$
- $5x^3\cdot(-4)=5\cdot(-4)\cdot x^3=-20x^3$

También podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros:

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & & -2x^3 & & +x & +4 \\ & & \times & & x^2 & -3x & +1 \\ \hline & & & -2x^3 & & +x & +4 \\ & 6x^4 & & & -3x^2 & -12x & \\ -2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & & \\ \hline -2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & & -11x & +4 \end{array}$$

Actividades propuestas

8. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $(-x^3+x-5)+(2x^2+5x+4)+(-4x^3-2x^2+3x)$

b) $(x^2+4)+(-2x+4)+(-6x^3+3x^2+x+1)-x^2$

9. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-2x)\cdot(3x^2-4)$

b) $(2x^3+1)\cdot(-4x+5)$

c) $(4x^3-x^2-1)\cdot(2x+6)$

d) $(-1)\cdot(8x^2+7x-9)$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF