LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Caro

Revisor: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

2.1. El lenguaje de las ecuaciones

Ya sabes que:

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo:

- Si tenemos dos expresiones algebraicas: $7x + 3$ y $5x + 2$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $7x + 3 = 5x + 2$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama **primer miembro** y la que está a la derecha, **segundo miembro**.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "*desconocidas*". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Ejemplo:

- $6x – 1 = 5x + 8$ es una ecuación con una sola incógnita, mientras que
- $4x + 2y = 1$ o $3x – 8 = 9y$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e y.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente que aparece en alguna de sus incógnitas.

Ejemplo:

- $2x – 7 = 3x + 2$ es una ecuación de primer grado, mientras que $4x + 5xy^2 = 8$ es una ecuación de tercer grado ya que el monomio $5xy^2$ tiene grado 3 (1 + 2 = 3).

Actividades propuestas

10. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$4x – 5 = 6x – 7$			
	$3x + 2$	$x – 9$	
$8a + 7 = 65$			
	$4x – 3y$	$2 + y$	

11. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:

a) $x – 2y = 3x + 4$; b) $5x + 6y^2 = 7$ c) $8a + 9a^2 = 1$ d) $2x + 3x^2 = 4$.

12. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

a) $5x – 6 = 7x + 8$; b) $9x + y^2 = 13$ c) $x + 2x^2 = 3$ d) $4x + 5xy^2 = 6$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.2. Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones

Solución de una ecuación:

Una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica la igualdad, es decir, los dos términos de la ecuación valen lo mismo.

Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Actividades resueltas

- Si te fijas en la ecuación: $7x - 3 = 5x + 9$, verás que al darle valores a x la igualdad no siempre se cumple.

Por ejemplo, para $x = 1$, el primer miembro vale $7 \cdot 1 - 3 = +4$, mientras que el valor del segundo miembro es: $5 \cdot 1 + 9 = 5 + 9 = 14$. Luego 1 **no** es solución de la ecuación.

Para $x = 6$, el primer miembro toma el valor: $7 \cdot 6 - 3 = 42 - 3 = 39$; y el segundo miembro: $5 \cdot 6 + 9 = 30 + 9 = 39$. Por tanto 6 es una **solución** de la ecuación.

Si se desconoce la solución de una ecuación, resulta muy pesado resolverla probando un número tras otro.

Por eso lo que se hace habitualmente es transformarla en otras ecuaciones **equivalentes** más sencillas.

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones.

¿Sabías que todas las soluciones de todas las expresiones algebraicas posibles, de cualquier grado, forman lo que se denomina los "***números algebraicos***"? Por ejemplo, son algebraicos todos estos números: 1, 2, 1/3, 7/5, , , etc. Aunque la inmensa mayoría de los números que utilizamos en nuestra vida cotidiana son algebraicos, debes saber que realmente hay muchos, muchísimos más números "no algebraicos" que ya irás conociendo, aunque alguno ya conoces como al número π.

Ejemplo:

- $3x - 7 = 11$ es equivalente a $3x = 18$, puesto que la solución de ambas ecuaciones es $x = 6$.

Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

- Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.
- Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación $3x + 9 = x - 5$ transformándola en otra más sencilla equivalente.

Transformar una ecuación hasta que sus soluciones se hagan evidentes se llama "*resolver la ecuación*". Siguiendo estos pasos intentaremos resolver la ecuación: $3x + 9 = x - 5$.

1) Sumamos a los dos miembros $-x$ y restamos a los dos miembros 9: $3x - x + 9 - 9 = x - x - 5 - 9$.

2) Hacemos operaciones y conseguimos otra ecuación que tiene en el primer miembro los términos con x y en el segundo, los términos sin x: $3x - x = -5 - 9$.

3) Efectuamos las sumas en el primer miembro y en el segundo: $2x = -14$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 2: $\frac{2x}{2} = \frac{-14}{2}$ de donde $x = -7$.

5) Comprueba que todas las ecuaciones que hemos obtenido en este proceso son equivalentes y que su solución es $x = -7$.

- Resuelve la ecuación $6 - x = 2x - 3$.

1) Sumamos x y 3 para pasar a un miembro los términos con x y al otro miembro los términos sin x: $6 - x + x + 3 = 2x + x - 3 + 3$,

2) Hacemos operaciones: $6 + 3 = 2x + x$

3) Efectuamos las sumas: $9 = 3x$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 3: $3 = x$.

La solución de la ecuación es $x = 3$.

5) Comprobamos que en efecto es la solución: $6 - x = 2x - 3 \Rightarrow 6 - 3 = 3;\ 2\cdot3 - 3 = 3$.

El procedimiento utilizado en las actividades es un método universal para **resolver** cualquier ecuación de grado 1, es decir, donde x aparece sin elevar a otro exponente como en x^2. Las ecuaciones de primer grado tienen siempre una única solución, pero en general, las soluciones no tienen porqué ser números enteros como en los ejemplos.

Actividades propuestas

13. Averigua cuál de los números es la solución de la ecuación y escríbelo en tu cuaderno:

Ecuación	Posibles soluciones		Ecuación	Posibles soluciones
$3x + 5 = x - 1$	2, –1, –3		$a^2 - 6 = -2$	–2, –6, 2
$x + 6 = 4x - 3$	3, –2, –3		$b - 4 = 8 - b$	3, 4, 6

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x - 1 = 3x - 4$ b) $7x + 9 = 5x - 6$ c) $6x + 8 = 14$ d) $3x - 9 = 2x - 11$

15. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 10$.

a) $x - 10 = 5$ b) $16 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 32$ d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$

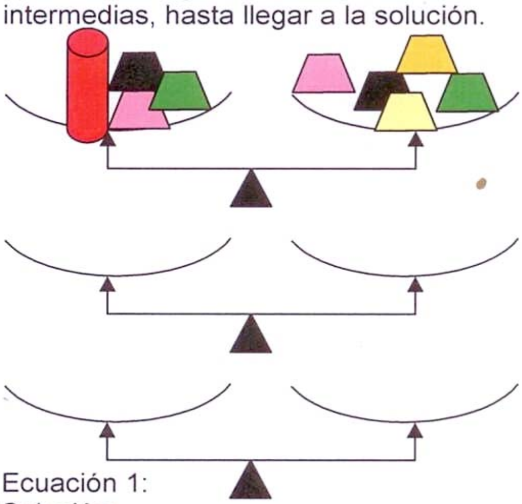
16. Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $2x - 5 = 13$ b) $3x = 15$ c) $5x + 12 = 7$ d) $x = -5$

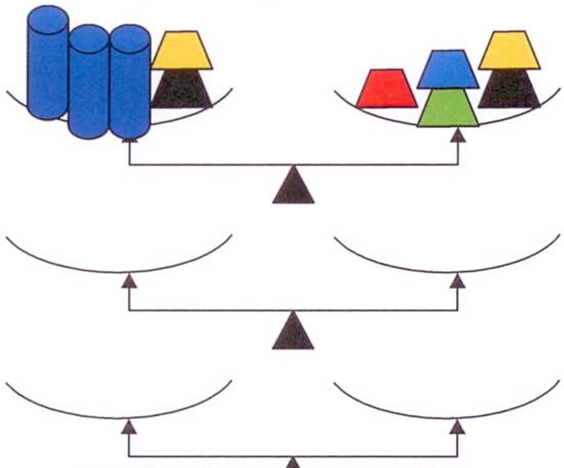
Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Material didáctico fotocopiable: Balanzas

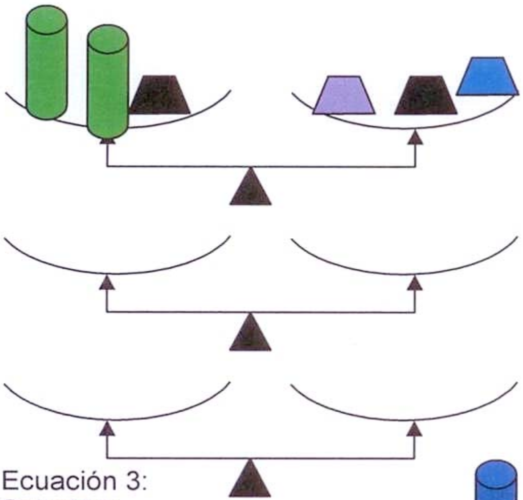
a) Todas las pesas son iguales a 1. Las balanzas están equilibradas. Mantén siempre equilibradas las balanzas siguientes, hasta conseguir conocer cuanto pesa el objeto cilíndrico.
b) Escribe algebraicamente la situación actual de cada balanza, y todas las situaciones intermedias, hasta llegar a la solución.



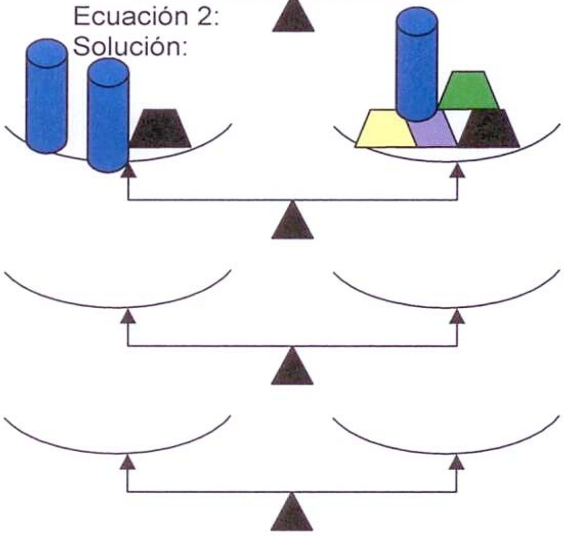
Ecuación 1:
Solución:



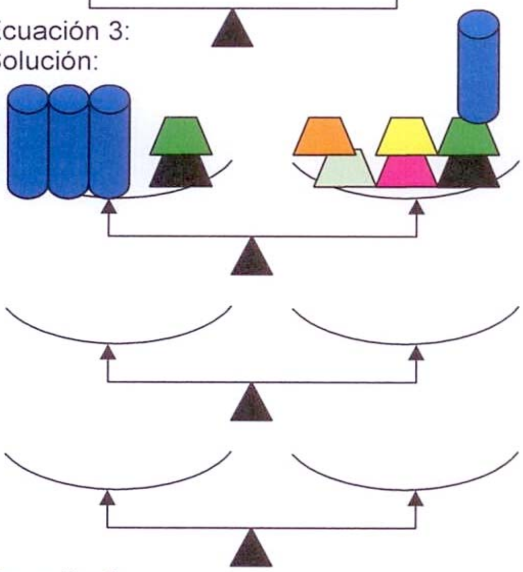
Ecuación 2:
Solución:



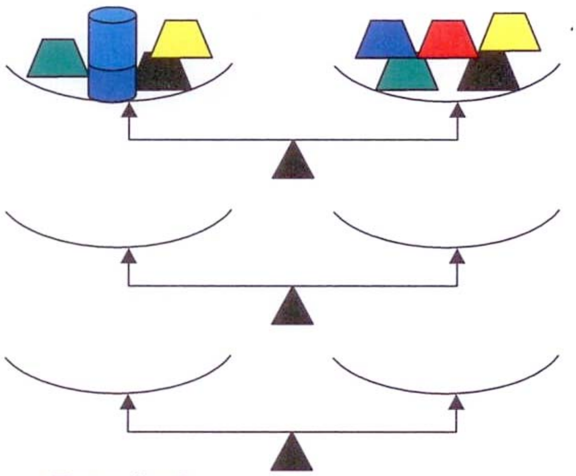
Ecuación 3:
Solución:



Ecuación 4:
Solución:



Ecuación 5:
Solución:



Ecuación 6:
Solución:

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

3.1. Procedimiento

Ya sabes que:

Muchos problemas pueden resolverse mediante una ecuación.

Actividades resueltas

- Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 9.

Para resolverlo, sigue los siguientes pasos:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate:

¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número x. Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 9.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema que queremos resolver mediante una ecuación. Escribe en lenguaje algebraico el enunciado del problema y plantea una ecuación:

$$x + (x + 1) = 9.$$

Pregúntate si efectivamente resuelve el problema releyendo el enunciado.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resuelve la ecuación. Para resolver una ecuación conviene seguir un orden de actuación que nos ayude a no cometer errores, para ello seguimos el procedimiento que acabamos de aprender.

Quita, si los hay, paréntesis y denominadores: $x + x + 1 = 9$.

Para poner en el primer miembro los términos con x, y en el segundo los que no lo tienen, **haz lo mismo a los dos lados**, resta 1 a los dos miembros: $x + x + 1 - 1= 9 - 1$, luego $x + x = 9 - 1$. Opera: $2x = 8$. Despeja:

Para despejar la x, se hace lo mismo a los dos lados, se dividen por 2 ambos miembros: $2x/2 = 8/2$, por tanto, $x = 4$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, comprueba que: $4 + 5 = 9$.

Actividades propuestas

17. La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más 3. Calcula dichos números.

18. La madre de Álvaro tiene el triple de la edad de su hijo, y éste tiene 32 años menos que su madre. ¿Cuántos años tienen cada uno?

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Problemas numéricos

Actividades resueltas

- En un pequeño hotel hay 50 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 87 camas, ¿cuántas habitaciones son simples y cuántas son dobles?

Sigue los pasos para la resolución de problemas.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de habitaciones simples. El número de habitaciones dobles es $34 - x$. El número de camas es 54.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Escribe en forma de ecuación la información del enunciado:

$$x + 2(34 - x) = 54.$$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación. Quita paréntesis:

$$x + 68 - 2x = 54.$$

Para poner en el primer miembro los términos con x y en el segundo los términos sin x, resta 68 a los dos miembros:

$$x + 68 - 2x - 68 = 54 - 68.$$

Opera:

$$-x = -14$$

Para despejar la x divide los dos miembros por -1:

$$x = -14/-1 = 14.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 14 habitaciones simples. Luego hay $34 - 14 = 20$ habitaciones dobles. Por tanto el número de camas es 54 pues:

$$14 + 2\cdot 20 = 54.$$

- En una granja hay 50 animales entre gallinas y conejos, y entre todos los animales suman 120 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de gallinas, y como hay 50 animales en total, conejos tendremos $50 - x$.

Como una gallina tiene 2 patas y un conejo 4, tendremos en total $2x + 4(50 - x)$ patas.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Como sabemos que el número total de patas es 120, podemos escribir esta ecuación:

$$2x + 4(50 - x) = 120$$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación. Quita paréntesis:

$$2x + 200 - 4x = 120$$

Si restamos 200 en ambos lados obtenemos:

$$2x + 200 - 4x - 200 = 120 - 200$$

Operando obtenemos:

$$-2x = -80$$

Dividiendo por –2 en ambos lados resolvemos la ecuación:

$$-2x/-2 = -80/-2 \text{ luego } x = 40.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 40 gallinas y 10 conejos pues $50 - x = 50 - 40 = 10$.

Las patas de 40 gallinas y 10 conejos suman $40 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 80 + 40 = 120$

Actividades propuestas

19. Un mago le dijo: Piensa un número, súmale 12, multiplica por 2 el resultado, resta 20 y divide por 2. Dime que te sale. Dijo 35. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 33. Adivina como lo supo el mago. (Sugerencia: escribe previamente la cadena de operaciones).

20. Piensa un número, multiplícale por 10, réstale el número que has pensado y divide el resultado entre 9. ¡Has obtenido el número que pensaste! Busca el truco: escribe algebraicamente, llamando *x* al número, la expresión algebraica de las operaciones realizadas, y adivina como lo supo el mago.

21. Si la suma de tres números consecutivos es 63, ¿de qué números se trata? (Sugerencia: ilustra la situación con una balanza equilibrada. Mantenla equilibrada hasta conseguir la ecuación equivalente que nos dé el resultado).

22. Hemos comprado 8 libros iguales y hemos pagado con un billete de 50 €. Si nos han devuelto 10 €, ¿cuánto costaba cada libro?

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Problemas de geometría

Muchos problemas de geometría se pueden resolver por métodos algebraicos, utilizando ecuaciones.

Actividades resueltas

- Se quiere dibujar un triángulo de 55 cm de perímetro, de forma que un lado sea el doble de otro, y el tercero sea el triple del menor menos 5 cm.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un triángulo, pensando en los datos del enunciado.

Llamamos x al lado menor, de esta forma puedes definir los otros dos lados. El lado mediano es $2x$. El lado mayor es $3x - 5$

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Como el perímetro es 55, se puede plantear la ecuación: $x + 2x + (3x - 5) = 55$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Se resuelve la ecuación: $x + 2x + 3x - 5 + 5 = 55 + 5$; $x + 2x + 3x = 60$; $6x = 60$.

Luego $x = 60 / 6 = 10$ es la longitud del lado menor. Los otros dos lados miden $2x = 20$ y $3x - 5 = 25$.

Solución: Los lados del triángulo miden 10 cm, 20 cm y 25 cm.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Sumando los tres lados, $10 + 20 + 25 = 55$, obtenemos el perímetro del triángulo, 55.

Actividades resueltas

- Tienes un rectángulo de altura x cm y de base $2x + 3$. Si a la base de este rectángulo le quitan 2 cm y a la altura le añaden 5 cm, se convierte en un cuadrado. ¿Qué dimensiones tiene?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un rectángulo con las condiciones del problema. La expresión $2x + 3 - 2$ expresa los 2 cm que le quita a la base y $x + 5$ expresa los 5 cm que le añaden a la altura.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Si se ha formado un cuadrado como los lados son iguales ambas expresiones deben ser equivalentes: $2x + 3 - 2 = x + 5$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

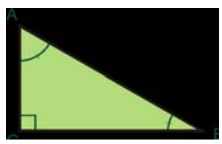
Resuelve la ecuación: $2x + 3 - 2 - x - 3 + 2 = x - x - 3 + 2 + 5$; $2x - x = 4$; $x = 4$

Solución: x = 4 cm es la longitud de la altura del rectángulo. Por tanto, $2 \cdot 4 + 3 = 11$ cm mide la base del rectángulo.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, a la altura le sumamos 5, $4 + 5 = 9$, y a la base le restamos 2, $11 - 2 = 9$, se obtiene un cuadrado.

Actividades propuestas



23. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al doble del tercer lado menos 2 cm. Calcula su medida si el perímetro del triángulo es 84 cm.

24. Calcula el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos suman 20 cm y el cateto mayor mide 4 cm más que el menor.

25. Calcula la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que el ángulo mayor es igual al triple del menor menos 6º.

3.4. Otros problemas

Actividades resueltas

- Si tenemos 21 billetes de 5 € y de 10 € que suman en total 170 €, ¿cuántos billetes tenemos de cada clase?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de billetes de 5 € y el resto, 21 – x, será el número de billetes de 10 €.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Plantea la ecuación que expresa la suma en euros de los dos tipos de billetes: $5 \cdot x + 10(21 - x) = 170$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Para resolver la ecuación, lo primero, quita paréntesis: $5x + 210 - 10x = 170$

Deja en el primer miembro todos los términos con *x*, y en el segundo los que no tienen *x*: $5x - 10x + 210 - 210 = - 210 + 170$

Haz operaciones: $-5x = -40$

Despeja la incógnita: $x = (-40) : (-5) = +8$

Por tanto, tenemos 8 billetes de 5 €, y 21 – 8 = 13 es el número de billetes de 10 €.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Comprobamos que $8 \cdot 5 = 40$ € y $13 \cdot 10 = 130$ €. Y que, en efecto, 40 + 130 = 70 €.

Solución: Tenemos 8 billetes de 5 € y 13 billetes de 10 €.

Actividades propuestas

26. Dos motocicletas salen al mismo tiempo de dos puntos que distan 420 km, en la misma dirección pero en sentido contrario. La primera lleva una velocidad de 60 km/h y la segunda, de 80 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse?

Ayuda: Haz un diagrama para comprender el enunciado

Solución: Tardan 3 horas en cruzarse.

27. Dos coches salen de dos puntos situados a 560 km de distancia, uno al encuentro de otro. El primero lleva una velocidad de 70 km/h y el segundo de 90 km/h. ¿Cuántas horas tardan en cruzarse?

28. Si en el monedero tenemos 16 monedas de 10 cent y de 20 céntimos de euro, y en total reunimos 2 €, ¿cuántas monedas de cada clase tenemos?

29. Si un bolígrafo vale el triple del precio de un lápiz, he comprado un total de 7 lápices y bolígrafos, y he pagado en total 5,50 €, ¿cuántos bolígrafos y cuántos lápices he comprado?

30. Nieves tiene una pareja de hámsteres con una camada de varias crías. Le regala a una amiga la mitad de las crías. A un segundo amigo le regala la mitad de las crías que le quedan más media cría. La única cría que le queda se la regala a un tercer amigo. ¿Cuántas crías formaban la camada?

31. Dos amigas, Maite y Ana, fueron a visitar una granja en la que había gallinas y conejos. Al salir Ana le preguntó a Maite: Sabes cuántas gallinas y cuántos conejos había. No, dijo Maite, pero había en total 72 ojos y 122 patas. Averigua el número de gallinas y de conejos de la granja.

32. De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.