Tema 7. Ecuaciones de primer grado

Resumen

Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad en la que aparecen números y letras ligados mediante las operaciones algebraicas.
En las ecuaciones las letras se llaman incógnitas. La incógnita preferida suele ser la letra *x*.

Ejemplos. Son ecuaciones las igualdades siguientes: $2x = 34$; $x^2 = 25$; $x + \frac{x}{2} = 30$.

- Las ecuaciones se emplean para resolver problemas, pues al establecer la relación entre los datos y el valor desconocido (la *x*) suele obtenerse una igualdad.

Ejemplo: Al intentar encontrar el número que cumple la relación: “un número más su mitad vale 30”, se obtiene una ecuación, pues si a ese número le llamamos *x*, entonces $x + \frac{x}{2} = 30$.

- Las ecuaciones se clasifican por su grado y por su número de incógnitas. La ecuación $2x = 34$ es de primer grado; $x^2 = 25$ es una ecuación de segundo grado.
- Soluciones de una ecuación son los valores de la incógnita que cumplen la ecuación.

Ejemplo: La ecuación $2x = 34$ se cumple para x = 17, pues 2 · 17 = 34. La ecuación $x^2 = 25$ tiene dos soluciones: $x = 5$ y $x = -5$, pues $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.
Ejemplos: Los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes:

a) $2x = 18$ y $4x = 36$ b) $2x + 3 = x + 7$ y $2x = x + 4$ c) $x + \frac{x}{2} = 30$ y $2x + x = 60$

Puedes comprobar que la solución de las dos primeras es $x = 9$; que la solución de las dos segundas es $x = 4$; y que la solución de las dos últimas es $x = 20$. (Compruébalo.)

Resolución de una ecuación

- Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones. Para resolver una ecuación hay que despejar la incógnita.
- Para resolver una ecuación hay que transformarla en otra equivalente a ella, más sencilla, de manera que encontrar su solución sea fácil.
- Las transformaciones que pueden hacerse en una ecuación son dos:
  1. Sumar el mismo número (la misma cosa) a los dos miembros de la igualdad. Lo que se pretende con esta transformación es cambiar los términos de un lado al otro de la igualdad. Esto se llama transposición de términos.
  2. Multiplicar (o dividir) por un mismo número los dos miembros de la igualdad. Lo que se pretende con esta transformación es quitar los denominadores de la ecuación.

Ejemplos: a) La ecuación $2x - 3 = x + 7$ puede trasformarse como sigue:
→ Se suma 3 a cada miembro → $2x - 3 = x + 7 \Leftrightarrow 2x - 3 + 3 = x + 7 + 3 \Rightarrow 2x = x + 10$
→ Se resta x a cada miembro → $2x - x = x + 10 - x \Leftrightarrow x = 10$.
Así se consigue despejar la *x*; esto es, determinar su solución. En este caso, $x = 10$

b) La ecuación $\frac{x-2}{5} = 1$ se transforma así:

→ Se multiplica por 5 cada miembro ⇒ $\frac{x-2}{5} \cdot 5 = 1 \cdot 5 \Leftrightarrow x - 2 = 5$

→ Se suma 2 a cada miembro → $x - 2 + 2 = 5 + 2 \rightarrow x = 7$
La solución de la ecuación es $x = 7$.

Resolución de ecuaciones de primer grado: transposición de términos

1. Ecuación $x+a=b$. Se resuelve restando a a ambos miembros. Queda: $x=b-a$.

Ejemplos: a) $x+5=8$ $\to$ restando 5 se tiene: $x=8-5 \Rightarrow x=3$.

b) $x+2=-3$ $\to$ restando 2 se tiene: $x=-3-2 \Rightarrow x=-5$.

2. Ecuación $x-a=b$. Se resuelve sumando a a ambos miembros. Queda: $x=b+a$.

Ejemplos: a) $x-3=6$ $\to$ sumando 3 se tiene: $x=6+3=9$. La solución es $x=9$.

b) $x-4=0$ $\to$ sumando 4 se tiene: $x=0+4=4$. La solución es $x=4$.

Observa:

Lo que está restando en un miembro, pasa sumando al otro miembro: $x+a=b \Rightarrow x=b-a$.

Lo que está sumando en un miembro, pasa restando al otro miembro: $x-a=b \Rightarrow x=b+a$.

3. Ecuación $ax=b$. Se resuelve dividiendo por a ambos miembros. Queda: $x=\frac{b}{a}$.

Ejemplos: a) $2x=34$ $\to$ dividiendo por 2 se tiene: $x=\frac{34}{2}=17$. La solución es. $x=17$.

b) $2x=-3$ $\to$ dividiendo por 2 se tiene: $x=\frac{-3}{2}=-1{,}5$. La solución es $x=-1{,}5$

4. Ecuación $\frac{x}{a}=b$. Se resuelve multiplicando por a ambos miembros. Queda: $x=ab$.

Ejemplos: a) $\frac{x}{3}=2$ $\to$ multiplicando por 3 se tiene: $x=2\cdot3=6$. La solución es $x=6$.

b) $\frac{x}{5}=-1$ $\to$ multiplicando por 5 se tiene: $x=-1\cdot5=-5$. La solución es $x=-5$

Observa:

Lo que está multiplicando en un miembro, pasa dividiendo al otro miembro; y lo que está dividiendo, pasa multiplicando. Esto es: $ax=b \Rightarrow x=\frac{b}{a}$; $\frac{x}{a}=b \Rightarrow x=ab$.

Resolución de ecuaciones de primer grado: caso general

Se pueden resolver aplicando los pasos siguientes:

1. Si hay paréntesis, se resuelven. Hay que tener en cuenta las reglas de los signos.
2. Si hay denominadores, se quitan. Para quitarlos hay que multiplicar todos los términos por el m.c.m. de los denominadores.
3. Se pasan (transponen) las x a un miembro y los números al otro miembro: lo que está sumando, pasa restando; lo que está restando, pasa sumando. Se agrupan: se suman.
4. Se despeja la x: lo que multiplica a la x pasa dividiendo al otro miembro; lo que divide a la x, pasa multiplicando al otro miembro.

Ejemplos:

a) $3x-5+2x=4-6x+7+x \Rightarrow 3x+2x+6x-x=4+7+5 \Rightarrow 10x=16 \Rightarrow x=\frac{16}{10}=1{,}6$

b) $3-4x-(2x-5)=14-9x \Rightarrow 3-4x-2x+5=14-9x \Rightarrow -4x-2x+9x=14-3-5 \Rightarrow$

$3x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3$.