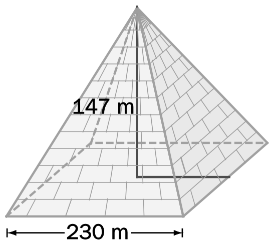
13 Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

ACTIVIDADES INICIALES

13.I. La Gran Pirámide tiene una base cuadrada de unos 230 metros de largo, y una altura aproximada de 147 metros.

Imagina que se quiere cubrir con una sábana blanca. ¿Cuántos metros cuadrados de tela se necesitarían?



La apotema de cada triángulo mide unos 187 metros, por lo que las caras laterales tienen una superficie de unos 86 000 metros cuadrados.

13.II. Las pirámides son uno de los símbolos más representativos de Egipto, pero otras culturas también construyeron monumentos con esta forma. Investiga otras regiones del mundo en las que se conserven pirámides.

El ejemplo más sencillo son las pirámides de los incas y los mayas, en América.

13.III. Podemos encontrar reproducciones de pirámides construidas con distintos materiales, con supuestos efectos beneficiosos para la salud, o para atraer la buena suerte. ¿Crees que este tipo de amuletos tiene alguna base científica? Debate con tus compañeros.

Actividad de debate en el aula.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

13.1. Halla las áreas lateral y total de un ortoedro de dimensiones 4, 5 y 7 centímetros.

$A_L = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 7 = 96$ cm^2 $\quad$ $A_T = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 7 = 166$ cm^2

13.2. Calcula el área total de un prisma regular hexagonal de 6 centímetros de altura, sabiendo que el lado de la base mide 4 centímetros, y su apotema, 3,5.

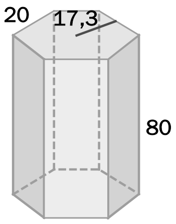
$A_T = p \cdot (h + a_p) = 6 \cdot 4 \cdot (6 + 3{,}5) = 228$ cm^2

13.3. Halla el área total y lateral de un cubo de arista *a* centímetros.

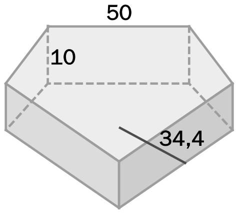
$A_L = 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a = 4a^2$ $\quad$ $A_T = 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a = 6a^2$

13.4. (TIC) Calcula el área total de los siguientes prismas regulares cuyas longitudes vienen dadas en milímetros.

a)



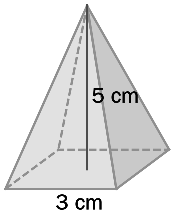
b)



a) $A_T = p \cdot (h + a_p) = 6 \cdot 20 \cdot (80 + 17,3) = 11\,676 \text{ cm}^2$

b) $A_T = p \cdot (h + a_p) = 5 \cdot 50 \cdot (10 + 34,4) = 11\,100 \text{ cm}^2$

13.5. Calcula las áreas lateral y total de la pirámide regular de la figura.

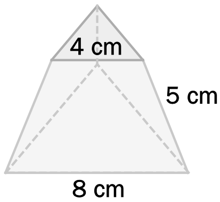


$A_p = \sqrt{1{,}5^2 + 5^2} \approx 5{,}22 \text{ cm}$

$A_L = \dfrac{1}{2} \cdot p \cdot A_p = 31{,}32 \text{ cm}^2$

$A_T = A_L + A_B = 40{,}32 \text{ cm}^2$

13.6. Calcula las áreas lateral y total del siguiente tronco de pirámide regular de bases dos triángulos.



La medida de la altura H en este tronco de pirámide es $H = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \approx 4{,}58$ cm.

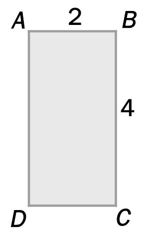
$A_L = \dfrac{p_1 + p_2}{2} H = \dfrac{24 + 12}{2}\sqrt{21} = 18\sqrt{21} \approx 82{,}49 \text{ cm}^2$

$A_T = A_L + A_{\text{BASE MAYOR}} + A_{\text{BASE MENOR}} = 18\sqrt{21} + \dfrac{8 \cdot \sqrt{8^2 - 4^2}}{2} + \dfrac{4 \cdot \sqrt{4^2 - 2^2}}{2} = 18\sqrt{21} + 4\sqrt{48} + 2\sqrt{12} \approx$

$\approx 117{,}1 \text{ cm}^2$

13.7. Actividad resuelta.

13.8. Calcula el área lateral de los cilindros que se generan al girar el rectángulo alrededor del lado *AB* y alrededor del lado *AD*. ¿Son iguales?

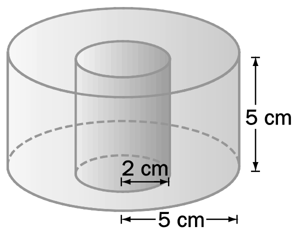


Alrededor del lado *AB*, $A_L = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4 = 16\pi$ cm^2

Alrededor del lado *AD*, $A_L = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 2 = 16\pi$ cm^2

Sí, ambas áreas son iguales.

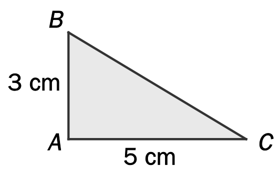
13.9. (TIC) Calcula el área de la siguiente pieza.



El área de la arandela es igual al área total del cilindro exterior, más el área lateral del cilindro interior y menos las dos bases del cilindro interior. Así:

$A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 = 351{,}68$ cm^2

13.10. (TIC) Halla las áreas lateral y total del cono que se genera al girar el triángulo rectángulo alrededor del cateto *AB*.

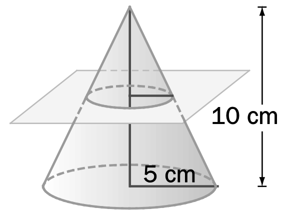


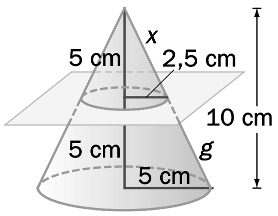
La generatriz del cono es $g = \sqrt{3^2 + 5^2} = 5{,}83$ cm.

$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 5 \cdot 5{,}83 = 91{,}53$ cm^2

$A_T = A_L + \pi \cdot r^2 = 91{,}53 + 3{,}14 \cdot 5^2 = 170{,}03$ cm^2

13.11. (TIC) Calcula las áreas lateral y total del tronco de cono que se obtiene al cortar el cono de la figura por un plano paralelo a la base que pasa por el punto medio de la altura.





Los dos triángulos rectángulos que aparecen en la figura son semejantes. Por tanto:

$$\frac{5}{r_2} = \frac{10}{r_1} \Rightarrow r_2 = \frac{5 \cdot 5}{10} = 2{,}5 \text{ cm}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras: $g = \sqrt{5^2 + 2{,}5^2} \approx 5{,}59$ cm.

$A_L = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot g = 3{,}14 \times 7{,}5 \times 5{,}59 = 131{,}64 \text{ cm}^2$

$A_T = A_L + \pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot r_2^2 = 131{,}64 + 3{,}14 \times 25 + 3{,}14 \times 6{,}25 = 229{,}77 \text{ cm}^2$

13.12. Actividad resuelta.

13.13. (TIC) Calcula el área de las esferas cuyo radio es el que se indica.

a) 2 cm **b) 4,75 dm** **c) 0,5 m**

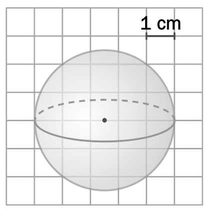
a) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$

b) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}75^2 = 283{,}4 \text{ dm}^2$

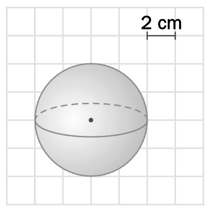
c) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5^2 = 3{,}14 \text{ m}^2$

13.14. Halla el área de las siguientes superficies esféricas.

a)



b)



a) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 = 78{,}5 \text{ cm}^2$

b) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 = 200{,}96 \text{ cm}^2$

13.15. (TIC) El diámetro del planeta Marte mide 6795 kilómetros. ¿Cuánto mide su superficie?

$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 3397{,}5^2 = 144\ 980\ 158{,}5\ \text{km}^2$

13.16. La superficie de la Tierra se divide en 24 husos horarios imaginarios. Halla el área de un huso horario terrestre. El radio medio de la Tierra es de 6370 kilómetros.

La superficie de la Tierra es $A_{\text{Tierra}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6370^2 \approx 510\ 000\ 000\ \text{km}^2$.

Por tanto, la superficie de cada huso será de $\dfrac{510000000}{24} = 21\ 250\ 000\ \text{km}^2$.

13.17. Actividad resuelta.

13.18. (TIC) Expresa las siguientes medidas de volumen en las unidades que se indican.

a) 450 cm^3 a mm^3

b) 20,5 m^3 a hm^3

c) 1250 dm^3 a m^3

d) 2 m^3 a cm^3

e) 3,01 dam^3 a km^3

f) 0,03 hm^3 a cm^3

a) 450 cm^3 = 450 000 mm^3

b) 20,5 m^3 = 0,0000205 hm^3

c) 1250 dm^3 = 1,25 m^3

d) 2 m^3 = 2 000 000 cm^3

e) 3,01 dam^3 = 0,00000301 km^3

f) 0,03 hm^3 = 30 000 000 000 cm^3

13.19. (TIC) Pasa a la unidad que se indica las siguientes medidas de volumen.

a) 3 m^3 200 dm^3 900 cm^3 a cm^3

b) 40 hm^3 500 dam^3 45 000 m^3 a hm^3

c) 3 dam^3 25,6 m^3 2000 mm^3 a dm^3

a) 3 m^3 200 dm^3 900 cm^3 = 3 000 000 cm^3 + 200 000 cm^3 + 900 cm^3 = 3 200 900 cm^3

b) 40 hm^3 500 dam^3 45 000 m^3 = 40 hm^3 + 0,5 hm^3 + 0,045 hm^3 = 40,545 hm^3

c) 3 dam^3 25,6 m^3 2000 mm^3 = 3 000 000 dm^3 + 25 600 dm^3 + 0,002 dm^3 = 3 025 600,002 dm^3

13.20. Actividad resuelta.

13.21. Expresa en litros:

a) 860 cL **b) 1255 dL** **c) 8150 mL**

a) 860 cL = 8,6 L b) 1255 dL = 125,5 L c) 8150 mL = 8,15 L

13.22. Indica el número de centilitros de:

a) 18 L **b) 21,2 daL** **c) 123 dL**

a) 18 L = 1800 cL b) 21,2 daL = 21 200 cL c) 123 dL = 1230 cL

13.23. (TIC) Expresa en decilitros:

a) 1,2 hL 0,3 L 5 cL **b) 3 daL 42 dL 10 mL**

a) 1,2 hL 0,3 L 5 cL = 1200 dL + 3 dL + 0,5 dL = 1203,5 dL

b) 3 daL 42 dL 10 mL = 300 dL + 42 dL + 0,1 dL = 342,1 dL

13.24. (TIC) Pasa a litros:

a) 5 dm^3 **b) 2500 cm^3** **c) 0,02 hm^3**

a) 5 dm^3 = 5 L

b) 2500 cm^3 = 2,5 dm^3 = 2,5 L

c) 0,02 hm^3 = 20 000 000 dm^3 = 20 000 000 L

13.25. (TIC) ¿Cuántos decímetros cúbicos son?

a) 48 L **b) 0,25 daL** **c) 2,25 hL** **d) 0,04 kL**

a) 48 L = 48 dm^3

b) 0,25 daL = 2,5 L = 2,5 dm^3

c) 2,25 hL = 225 L = 225 dm^3

d) 0,04 kL = 40 L = 40 dm^3

13.26. Un pozo contiene 1,5 metros cúbicos de agua. Cada día se sacan 1,5 hectolitros para el riego de una plantación. ¿Para cuántos días hay agua si se supone la situación de ausencia total de lluvia?

Cada día se sacan 1,5 hL = 150 L = 150 dm^3 = 0,15 m^3.

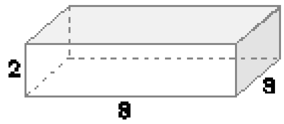
Queda agua para $\frac{1,5}{0,15}$ = 10 días.

13.27. Actividad interactiva.

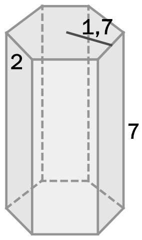
13.28. Actividad resuelta.

13.29. Calcula los volúmenes de los siguientes prismas, cuyas medidas están dadas en cm.

a)



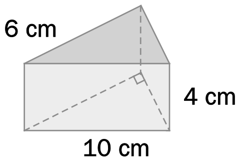
b)



a) $V = 8 \cdot 3 \cdot 2 = 48 \text{ cm}^3$

b) $V = \dfrac{p \cdot a_p}{2} \cdot h = \dfrac{6 \cdot 2 \cdot 1{,}7}{2} \cdot 7 = 71{,}4 \text{ cm}^3$

13.30. Halla el volumen del prisma de la figura.



$$V = A_{\text{BASE}} \cdot h = \frac{6 \cdot \sqrt{10^2 - 6^2}}{2} \cdot 4 = \frac{6 \cdot \sqrt{64}}{2} \cdot 4 = 96 \text{ cm}^3$$

13.31. (TIC) Halla el volumen de un prisma hexagonal regular cuyo lado de la base y altura miden 5 y 8 centímetros, respectivamente.

La apotema de la base mide $a_p = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33$ cm.

El área de la base es $A_{\text{BASE}} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95 \text{ cm}^2$

El volumen del prisma es $V = A_{\text{BASE}} \cdot h = 64{,}95 \cdot 8 = 519{,}6 \text{ cm}^3$.

13.32. (TIC) Es invierno y hace mucho frío. Una piscina de 10 metros de larga por 6 de ancha se ha cubierto con una capa de hielo de 3 cm de espesor. ¿Cuántos litros de hielo habrá?

$V = 10 \cdot 6 \cdot 0{,}03 = 1{,}8 \text{ m}^3 = 1800 \text{ dm}^3 = 1800$ L

13.33. Queremos hacer un tetra brik de base cuadrada y con capacidad de medio litro. ¿Cuánto cartón necesitamos?

0,5 L = 0,5 dm^3 = 500 cm^3

Si llamamos a al lado de la base y h a la altura, medidos en centímetros, sabemos que el volumen es:

$V = a^2 \cdot h = 500$ cm^3

La cantidad de cartón necesaria viene dada por:

$A_T = 2a^2 + 2ah + 2ah = 2a^2 + 4ah$ cm^2

De este modo, la solución dependerá del valor de a y h; por ejemplo, si h = 20 cm, tendremos:

$a^2 \cdot h = 500 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ cm

y, por tanto, necesitaríamos $2 \cdot 25 + 4 \cdot 5 \cdot 20 = 450$ cm^2 = 4,5 m^2 de cartón.

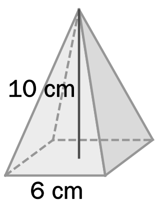
Otra posibilidad es asumir que el tetra brik tiene forma de cubo, es decir, $a = h$, de donde $a^3 = 500$ y, por tanto, $a = \sqrt[3]{500} \approx 7{,}94$ cm, con lo que necesitaríamos $6{\cdot}a^2 \approx 378$ cm^2 de cartón. De hecho, este es el caso en el que menos cantidad de cartón se necesitaría.

13.34. Actividad interactiva.

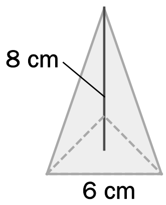
13.35. Actividad resuelta.

13.36. Calcula el volumen de las siguientes pirámides regulares.

a)



b)



a) $A_{BASE} = 6^2 = 36$ cm^2

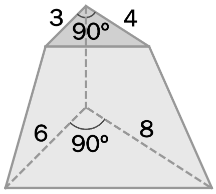
$$V = \frac{A_{BASE} \cdot h}{3} = \frac{36 \cdot 10}{3} = 120 \text{ cm}^3$$

b) Altura de la base: $h_B = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2$ cm

$$A_{BASE} = \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 15{,}6 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_{BASE} \cdot h}{3} = \frac{15{,}6 \cdot 8}{3} = 41{,}6 \text{ cm}^3$$

13.37. (TIC) Calcula el volumen del tronco de pirámide sabiendo que las medidas vienen dadas en metros y que las alturas de las pirámides completa y sobrante son de 6 y 3, respectivamente.



Volumen de la pirámide completa: $V_1 = \dfrac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \dfrac{\frac{6 \cdot 8}{2} \cdot 6}{3} = 48 \text{ m}^3$

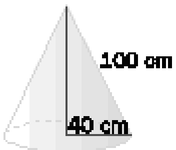
Volumen de la pirámide sobrante: $V_2 = \dfrac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \dfrac{\frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 3}{3} = 6 \text{ m}^3$

Volumen del tronco de pirámide: $V_1 - V_2 = 48 - 6 = 42 \text{ m}^3$

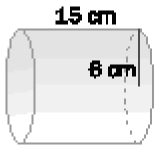
13.38. Actividad resuelta.

13.39. (TIC) Calcula el volumen de estos cuerpos.

a)



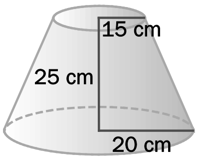
b)

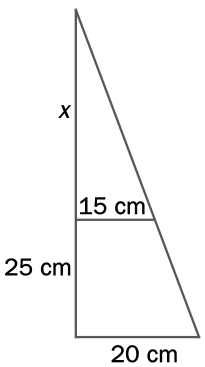


a) $V = \dfrac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \dfrac{\pi \cdot 40^2 \cdot \sqrt{100^2 - 40^2}}{3} = 153\,485{,}74 \text{ cm}^3$

b) $V = A_{\text{BASE}} \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 15 = 1695{,}6 \text{ cm}^3$

13.40. (TIC) Calcula el volumen del tronco de cono.





El volumen será la diferencia entre el volumen del cono completo y el del cono sobrante.

Observemos la figura. Aplicando la semejanza de triángulos:

$\dfrac{x}{15} = \dfrac{x+25}{20} \Rightarrow 20x = 15x + 375 \Rightarrow 5x = 375 \Rightarrow x = 75 \text{ cm}$

El volumen del tronco de cono es, por tanto:

$V = \dfrac{3{,}14 \cdot 20^2 \cdot 100}{3} - \dfrac{3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 75}{3} \approx 24204 \text{ cm}^3$

13.41. Actividad resuelta.

13.42. (TIC) Calcula el volumen de una esfera de diámetro 8 centímetros.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 4^3}{3} \approx 268 \text{ cm}^3$$

13.43. (TIC) Halla el volumen de una semiesfera de radio 3 metros.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3 \cdot 2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{6} = 56{,}52 \text{ cm}^3$$

13.44. (TIC) Un semicírculo de radio 3 centímetros gira alrededor de su diámetro. ¿Qué cuerpo geométrico genera? Calcula su volumen.

Se genera una esfera de radio 3 cm.

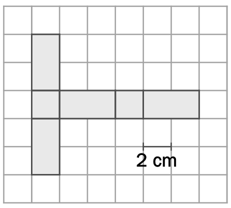
$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} = 113{,}04 \text{ cm}^3$$

EJERCICIOS

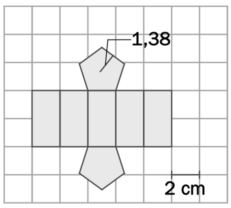
Área de los cuerpos geométricos

13.45. (TIC) Calcula el área total de los cuerpos geométricos que admiten los siguientes desarrollos planos.

a)



b)



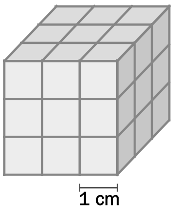
a) $10 \cdot 2^2 = 40 \text{ cm}^2$

b) Área del pentágono = $\frac{p \cdot a_p}{2} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 1{,}38}{2} = 6{,}9 \text{ cm}^2$

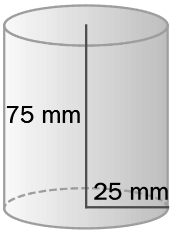
Área total = $2 \cdot 6{,}9 + 10 \cdot 2^2 = 53{,}8 \text{ cm}^2$

13.46. (TIC) Halla el área total de los siguientes cuerpos geométricos.

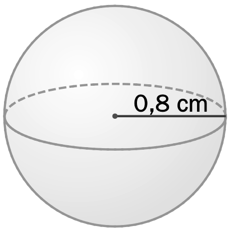
a)



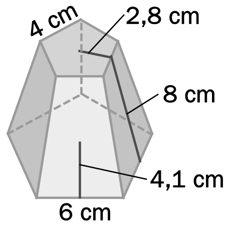
b)



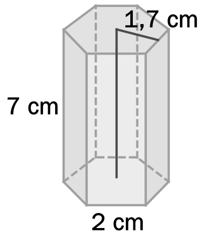
c)



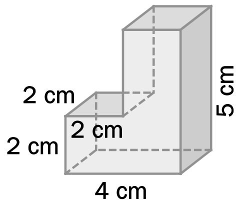
d)



e)



f)



a) $A_T = 6 \cdot 3^2 = 54 \text{ cm}^2$

b) $A_T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25 \cdot 75 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25^2 = 15\,700 \text{ mm}^2$

c) $A_T = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}8^2 = 8{,}04 \text{ cm}^2$

d) $A_L = \dfrac{p_1 + p_2}{2} \cdot H = \dfrac{30 + 20}{2} \cdot 8 = 200 \text{ cm}^2$ $\qquad A_T = 200 + \dfrac{30 \cdot 4{,}1}{2} + \dfrac{20 \cdot 2{,}8}{2} = 289{,}5 \text{ cm}^2$

e) $A_T = p \cdot (h + a_p) = 12 \cdot (7 + 1{,}7) = 104{,}4 \text{ cm}^2$

f) Observemos que el área total se puede calcular como el área del ortoedro de dimensiones 4, 2 y 5 cm, y restándole el área de dos rectángulos iguales de dimensiones 2 y 3 cm. Por tanto:

$A_T = 2 \cdot (4 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5) - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 76 - 12 = 64 \text{ cm}^2$

13.47. Calcula el área lateral y total de un cilindro de radio de la base 45 dam y de altura 50 dam.

$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 45 \cdot 50 = 14\,130 \text{ dam}^2$

$A_T = A_L + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 14\,130 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 45^2 = 26\,847 \text{ dam}^2$

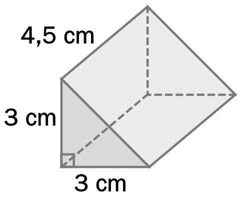
13.48. Un cono tiene por radio de la base 33 m y por generatriz 65 m. Calcula sus áreas lateral y total.

$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 33 \cdot 65 = 6735{,}3 \text{ m}^2$

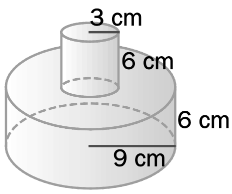
$A_T = A_L + \pi \cdot r^2 = 6735{,}3 + 3{,}14 \cdot 33^2 = 10\,154{,}76 \text{ m}^2$

13.49. (TIC) Halla el área total de los siguientes cuerpos.

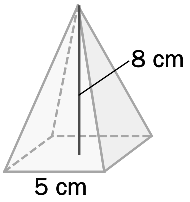
a)



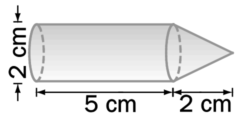
c)



b)



d)



a) $A_T = 2 \cdot \dfrac{3 \cdot 3}{2} + 4{,}5 \cdot \sqrt{3^2 + 3^2} + 2 \cdot 3 \cdot 4{,}5 = 9 + 4{,}5\sqrt{18} + 27 \approx 55{,}09 \text{ cm}^2$

b) $a_p = 2{,}5$ cm $\qquad A_p = \sqrt{8^2 + 2{,}5^2} \approx 8{,}38$ cm

$A_T = \dfrac{1}{2} \cdot p \cdot \left(A_p + a_p\right) = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot (8{,}38 + 2{,}5) = 108{,}8 \text{ cm}^2$

c) El área total de la pieza se puede calcular sumando el área total del cilindro de debajo más el área lateral del cilindro de encima, es decir,

$A_T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9 \cdot 6 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 6 = 960{,}84 \text{ cm}^2$

d) El área total de la pieza se puede calcular sumando el área total del cono más el área lateral del cilindro.

La generatriz del cono es $g = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ cm.

Por tanto: $A_T = 3{,}14 \cdot 1 \cdot 2{,}24 + 3{,}14 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 5 = 41{,}57 \text{ cm}^2$

13.50. Calcula el área total de un cubo sabiendo que el perímetro de la base es de 24 decímetros.

El lado del cubo mide $l = \dfrac{24}{4} = 6$ dm; por tanto, $A_T = 6 \cdot 6^2 = 216 \text{ dm}^3$.

13.51. (TIC) Calcula las áreas lateral y total de un prisma heptagonal regular sabiendo que el lado de la base mide 25 milímetros, que la apotema de la base es de 26 milímetros y que la altura del prisma es de 5 centímetros.

$A_L = p \cdot h = 7 \cdot 25 \cdot 50 = 8750 \text{ mm}^2$

$A_T = p \cdot (h + a_p) = 7 \cdot 25 \cdot (50 + 26) = 13\,300 \text{ mm}^2$

13.52. La base de un ortoedro es un rectángulo con medidas una doble de la otra y con perímetro de 18 decímetros. La tercera medida del ortoedro es el triple de la menor de la base. Calcula el área total de este cuerpo geométrico.

Las medidas del ortoedro son 3, 6 y 9 cm. Por tanto, $A_T = 2 \cdot (3 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 6 \cdot 9) = 198 \text{ cm}^2$.

13.53. (TIC) Calcula el área total de un tetraedro si cada una de sus aristas mide 25 centímetros.

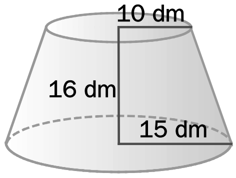
Todas las caras del tetraedro son triángulos equiláteros de lado 25 cm.

La altura de estas caras será $h = \sqrt{25^2 - 12{,}5^2} = \sqrt{468{,}75} \approx 21{,}65$ cm.

El área de una cara será $A = \dfrac{25 \cdot 21{,}65}{2} = 270{,}63$ cm^2.

El área total del tetraedro es $A_T = 270{,}63 \cdot 4 = 1082{,}52$ cm^2.

13.54. Halla el área lateral del siguiente tronco de cono.



La generatriz del tronco de cono es $g = \sqrt{16^2 + 5^2} = \sqrt{281} \approx 16{,}76$ dm.

El área lateral es $A_L = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot g = 3{,}14 \cdot (10 + 15) \cdot 16{,}76 = 1315{,}66$ dm^2.

Unidades de volumen y capacidad

13.55. Copia y completa en tu cuaderno:

a) 45 hL = ________ L

b) 700 cL = ________ L

c) 72 daL = ________ hL

d) 4572,5 dL = ________ daL

e) 4500 dm^3 = ________ m^3

f) 25 dam^3 = ________ hm^3

g) 0,005 m^3 = ________ cm^3

h) 0,03 hm^3 = ________ m^3

a) 45 hL = 4500 L

b) 700 cL = 7 L

c) 72 daL = 7,2 hL

d) 4572,5 dL = 45,725 daL

e) 4500 dm^3 = 4,5 m^3

f) 25 dam^3 = 0,025 hm^3

g) 0,005 m^3 = 5000 cm^3

h) 0,03 hm^3 = 30 000 m^3

13.56. Expresa en litros las capacidades de:

a) 40 daL + 5L + 2 dL

b) 35 L + 45 dL + 370 cL + 4000 mL

c) 4 hL + 54 daL + 600 dL

d) 3,5 kL + 0,6 hL + 23 daL + 150 cL

a) 40 daL + 5 L + 2 dL = 400 L + 5 L + 0,2 L = 405,2 L

b) 35 L + 45 dL + 370 cL + 4000 mL = 35 L + 4,5 L + 3,7 L + 4 L = 47,2 L

c) 4 hL + 54 daL + 600 dL = 400 L + 540 L + 60 L = 1000 L

d) 3,5 kL + 0,6 hL + 23 daL + 150 cL = 3500 L + 60 L + 230 L + 1,5 L = 3791,5 L

13.57. Expresa en metros cúbicos los volúmenes de:

a) $3\ m^3 + 1250\ dm^3 + 250\ 000\ cm^3$

b) $0{,}02\ hm^3 + 0{,}2\ dam^3 + 2\ m^3$

c) $2\ dam^3 + 50\ m^3 + 2000\ dm^3 + 3000\ cm^3$

d) $8\ km^3 + 4{,}5\ hm^3 + 51\ dam^3 + 10\ cm^3$

a) $3\ m^3 + 1250\ dm^3 + 250\ 000\ cm^3 = 3\ m^3 + 1{,}25\ m^3 + 0{,}25\ m^3 = 4{,}5\ m^3$

b) $0{,}02\ hm^3 + 0{,}2\ dam^3 + 2\ m^3 = 20\ 000\ m^3 + 200\ m^3 + 2\ m^3 = 20\ 202\ m^3$

c) $2\ dam^3 + 50\ m^3 + 2000\ dm^3 + 3000\ cm^3 = 2000\ m^3 + 50\ m^3 + 2\ m^3 + 0{,}003\ cm^3 = 2052{,}003\ m^3$

d) $8\ km^3 + 4{,}5\ hm^3 + 51\ dam^3 + 10\ cm^3 = 8\ 000\ 000\ 000\ m^3 + 4\ 500\ 000\ m^3 + 51\ 000\ m^3 +$
$+ 0{,}00001\ m^3 = 8\ 004\ 551\ 000{,}00001\ m^3$

13.58. (TIC) Pasa a la unidad de capacidad que se indica los siguientes volúmenes.

a) $450\ dm^3$ **a L**

b) $10\ m^3$ **a L**

c) $2000\ cm^3$ **a L**

d) $3{,}5\ dm^3$ **a kL**

e) $0{,}25\ dam^3$ **a hL**

f) $0{,}0045\ dm^3$ **a cL**

g) $45\ mm^3$ **a cL**

h) $45\ 000\ cm^3$ **a kL**

a) $450\ dm^3 = 450\ L$

b) $10\ m^3 = 10\ 000\ dm^3 = 10\ 000\ L$

c) $2000\ cm^3 = 2\ dm^3 = 2\ L$

d) $3{,}5\ dm^3 = 3{,}5\ L = 0{,}0035\ kL$

e) $0{,}25\ dam^3 = 250\ 000\ dm^3 = 250\ 000\ L = 2500\ hL$

f) $0{,}0045\ dm^3 = 0{,}0045\ L = 0{,}45\ cL$

g) $45\ mm^3 = 0{,}000045\ dm^3 = 0{,}000045\ L = 0{,}0045\ cL$

h) $45\ 000\ cm^3 = 45\ dm^3 = 45\ L = 0{,}045\ kL$

13.59. (TIC) Pasa a la unidad de volumen que se indica las siguientes medidas de capacidad.

a) $2500\ dm^3$ **a L**

b) $3600\ m^3$ **a mL**

c) $420\ cm^3$ **a cL**

d) $23\ dm^3$ **a daL**

e) $0{,}85\ dam^3$ **a L**

f) $7{,}3\ dm^3$ **a dL**

g) $0{,}00045\ hm^3$ **a kL**

h) $0{,}00022\ dam^3$ **a L**

a) $2500\ dm^3 = 2500\ L$

b) $3600\ m^3 = 3\ 600\ 000\ dm^3 = 3\ 600\ 000\ L = 3\ 600\ 000\ 000\ mL$

c) $420\ cm^3 = 0{,}42\ dm^3 = 0{,}42\ L = 42\ cL$

d) $23\ dm^3 = 23\ L = 2{,}3\ daL$

e) $0{,}85\ dam^3 = 850\ 000\ dm^3 = 850\ 000\ L$

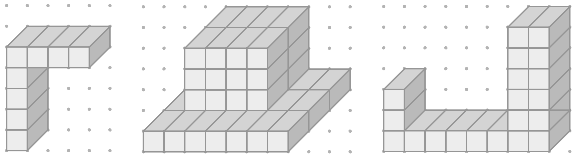
f) $7{,}3\ dm^3 = 7{,}3\ L = 73\ dL$

g) $0{,}00045\ hm^3 = 450\ 000\ dm^3 = 450\ 000\ L = 450\ kL$

h) $0{,}00022\ dam^3 = 220\ dm^3 = 220\ L$

Volumen de los cuerpos geométricos

13.60. Los siguientes cuerpos geométricos están formados por ladrillos todos iguales. Calcula el volumen de cada uno de ellos tomando como unidad el volumen de un ladrillo.



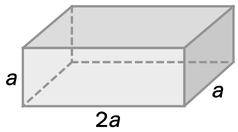
Primer cuerpo: 8 unidades cúbicas

Segundo cuerpo: 21 + 24 = 45 unidades cúbicas

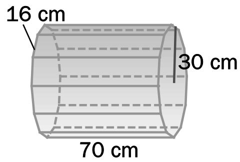
Tercer cuerpo: 8 + 12 = 20 unidades cúbicas

13.61. Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

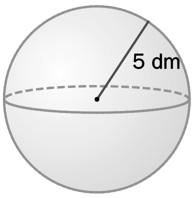
a)



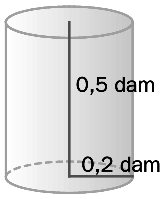
d)



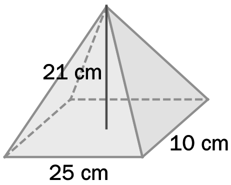
b)



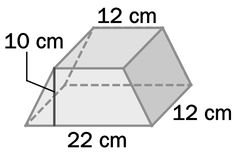
e)



c)



f)



a) $V = 2a \cdot a \cdot a = 2a^3$

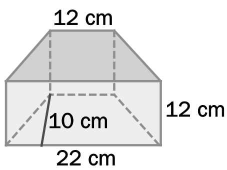
b) $V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^3}{3} = 523{,}33 \text{ dm}^3$

c) $V = \dfrac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \dfrac{25 \cdot 10 \cdot 21}{3} = 1750 \text{ cm}^3$

d) $V = A_{\text{BASE}} \cdot h = \dfrac{12 \cdot 16 \cdot 30}{2} \cdot 70 = 201\,600 \text{ cm}^3$

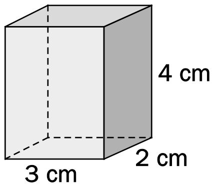
e) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}0628 \text{ dam}^3$

f) OJO: La figura no es un tronco de pirámide, ya que tiene aristas laterales paralelas. La figura es un prisma cuadrangular, como muestra el siguiente dibujo:



Por tanto: $V = A_{\text{BASE}} \cdot h = \dfrac{(22+12) \cdot 10}{2} \cdot 12 = 2040 \text{ cm}^3$

13.62. Dibuja un ortoedro de dimensiones 2, 3 y 4 centímetros y calcula la medida de su volumen.



$V = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24\ \text{cm}^3$

13.63. (TIC) Calcula cuántos litros caben en una esfera de radio 125 milímetros.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 125^3}{3} \approx 8\,177\,083\ \text{mm}^3 \approx 8{,}18\ \text{dm}^3 = 8{,}18\ \text{L}$$

13.64. Calcula el volumen de una pirámide de 3 centímetros de altura cuya base es un cuadrado de lado 4 centímetros.

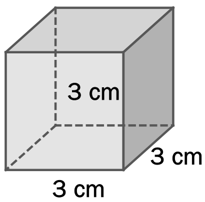
$$V = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \frac{4^2 \cdot 3}{3} = 16\ \text{cm}^3$$

13.65. Calcula el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de la base mide 3 centímetros y que la altura mide dos veces el diámetro de la base.

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 12 = 339{,}12\ \text{cm}^3$

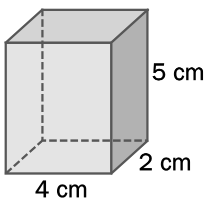
13.66. Dibuja un cubo de 27 centímetros cúbicos de volumen e indica la medida de su lado.

La medida del lado es $l = \sqrt[3]{27} = 3$ cm.



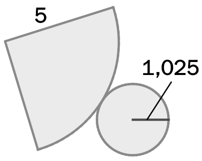
13.67. Dibuja un ortoedro con la única condición de que su volumen valga 40 cm^3. Indica las dimensiones que has escogido.

Por ejemplo, se pueden tomar las dimensiones 2, 4 y 5 cm.

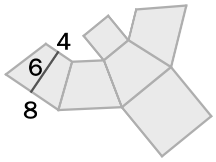


13.68. Calcula el volumen de los cuerpos geométricos que admiten como desarrollo plano estas representaciones (unidades en metros).

a)



b)

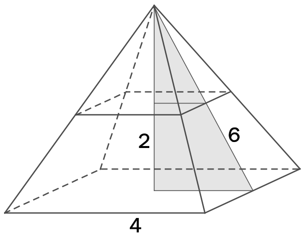


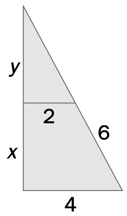
a) Se trata de un cono de generatriz 5 m y de radio de la base 1,025 m. La altura vale, por tanto,

$h = \sqrt{5^2 - 1{,}025^2} \approx 4{,}89$ m

$V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{3{,}14 \cdot 1{,}025^2 \cdot 4{,}89}{3} = 5{,}38\ \text{m}^3$

b) Se trata de un tronco de pirámide. El volumen será la diferencia entre el volumen de la pirámide completa y el de la pirámide sobrante. Observando el dibujo tenemos:





$y = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} \approx 5{,}66$ m

$\dfrac{y}{2} = \dfrac{x + y}{4} \Rightarrow y = x = 5{,}66$ m

Por tanto: $V = \dfrac{8^2 \cdot 11{,}32}{3} - \dfrac{4^2 \times 5{,}66}{3} = 211{,}31\ \text{m}^3$

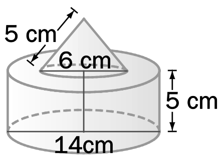
13.69. (TIC) Calcula el volumen de un cono de altura 4,5 decímetros y de generatriz 5,3 centímetros.

El radio de la base del cono es $r = \sqrt{5{,}3^2 - 4{,}5^2} = \sqrt{7{,}84} = 2{,}8$ dm.

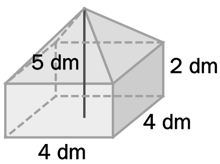
El volumen es $V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{3{,}14 \cdot 2{,}8^2 \cdot 4{,}5}{3} = 36{,}93\ \text{dm}^3$.

13.70. (TIC) Halla el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

a)



b)



a) El volumen solicitado es la suma de los volúmenes de un cilindro y un cono:

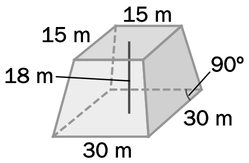
$V = 3{,}14 \cdot 7^2 \cdot 5 + \dfrac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{5^2 - 3^2}}{3} \approx 807\ \text{cm}^3$

b) El volumen solicitado es la suma de los volúmenes de un ortoedro y una pirámide:

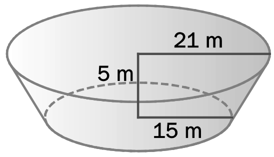
$V = 4 \cdot 4 \cdot 2 + \dfrac{4^2 \cdot 3}{3} = 48\ \text{dm}^3$

13.71. (TIC) Calcula el volumen del tronco de pirámide y el tronco de cono.

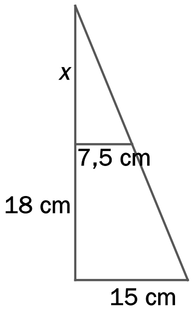
a)



b)



a) El volumen será la diferencia entre el volumen de la pirámide completa y el de la pirámide sobrante.



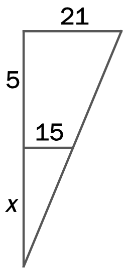
Observemos la figura. Aplicando la semejanza de triángulos:

$\frac{x}{7,5} = \frac{x+18}{15} \Rightarrow 15x = 7,5x + 135 \Rightarrow 7,5x = 135 \Rightarrow x = 18$ m

El volumen del tronco de pirámide es, por tanto:

$V = \frac{30^2 \cdot 36}{3} - \frac{15^2 \cdot 18}{3} = 9450 \text{ m}^3$

b) El volumen será la diferencia entre el volumen del cono completo y el del cono sobrante.



Observemos la figura. Aplicando la semejanza de triángulos:

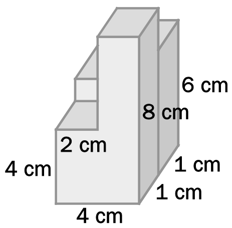
$\frac{x}{15} = \frac{x+5}{21} \Rightarrow 21x = 15x + 75 \Rightarrow 6x = 75 \Rightarrow x = 12,5$ m

El volumen del tronco de cono es, por tanto:

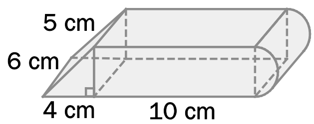
$V = \frac{3,14 \cdot 21^2 \cdot 17,5}{3} - \frac{3,14 \cdot 15^2 \cdot 12,5}{3} = 5133,9 \text{ m}^3$

13.72. (TIC) Halla el volumen de los siguientes cuerpos.

a)



b)



a) El volumen solicitado es la suma de los volúmenes de tres ortoedros de medidas 2, 1 y 4 cm; 2, 1 y 8 cm, y 4, 1 y 6 cm, respectivamente.

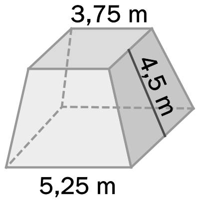
Por tanto: $V = 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 8 + 4 \cdot 1 \cdot 6 = 48 \text{ cm}^3$

b) El volumen solicitado es la suma de los volúmenes de un prisma triangular, un ortoedro y medio cilindro.

Por tanto: $V = \frac{4 \cdot \sqrt{5^2 - 4^2}}{2} \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot \sqrt{5^2 - 4^2} + \frac{3,14 \cdot \left(\frac{\sqrt{5^2 - 4^2}}{2}\right)^2 \cdot 6}{2} = 237,2 \text{ cm}^3$

PROBLEMAS

13.73. Calcula cuántos metros cuadrados de madera se necesitan para construir el podio representado en la figura si no tiene base inferior, es decir, se apoya directamente sobre el suelo.



Área lateral: $A_L = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot H = \frac{4 \cdot 5,25 + 4 \cdot 3,75}{2} \cdot 4,5 = 81 \text{ m}^2$

Área de la base superior: $A_{\text{BASE SUP.}} = 3,75 \cdot 3,75 = 14,06 \text{ m}^2$

Área total de la figura: $A_T = 81 + 14,06 = 95,06 \text{ m}^2$

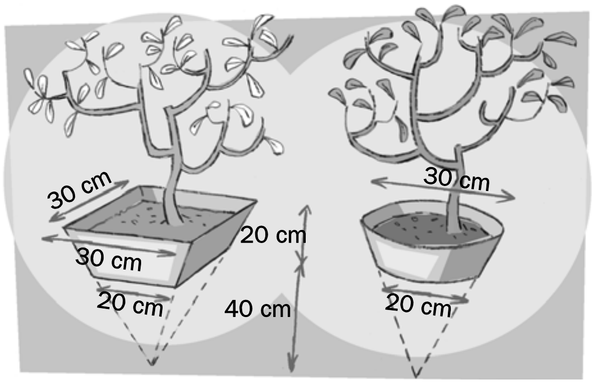
13.74. (TIC) Las dimensiones de una papelera cilíndrica son 20 centímetros de diámetro y 31 de altura. Calcula la superficie de material que se ha necesitado para fabricarla.

Área lateral: $A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 31 = 1946,8 \text{ cm}^2$

Área de la base inferior: $A_{\text{BASE INF.}} = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 10^2 = 314 \text{ cm}^2$

Área total de la figura: $A_T = 1946,8 + 314 = 2260,8 \text{ cm}^2 \approx 22,61 \text{ dm}^2$

13.75. Las figuras representan jardineras. ¿En cuál de ellas hay que echar más tierra para que se llenen?



Queremos determinar qué figura de las dadas, el tronco de pirámide o el tronco de cono, tiene mayor volumen.

En ambos casos el volumen es la diferencia entre el volumen de la figura (pirámide o cono) completa y el de la figura sobrante.

En ambos casos la altura de la figura completa es de 60 cm.

Lo mismo sucede con la altura de la figura sobrante, que es de 40 cm.

Además, el lado de la base de la pirámide completa coincide con el diámetro de la base del cono completo, ambos miden 30 cm. Lo mismo sucede con el lado de la base de la pirámide sobrante y el diámetro de la base del cono sobrante, ambos miden 20 cm.

El volumen del tronco de pirámide es, por tanto, $V_{\text{pirámide}} = \frac{30^2 \cdot 60}{3} - \frac{20^2 \cdot 40}{3} \approx 12666,67 \text{ cm}^3$.

El volumen del tronco de cono es, por tanto, $V_{\text{cono}} = \frac{\pi \cdot (30/2)^2 \cdot 60}{3} - \frac{\pi \cdot (20/2)^2 \cdot 40}{3} \approx 9943,33 \text{ cm}^3$.

De este modo, obtenemos que el tronco de pirámide, es decir, la primera jardinera, es el de mayor volumen.

13.76. Calcula el área y el volumen de las siguientes cajas de cartón de las que se conocen sus tres dimensiones sabiendo que tienen tapa inferior, pero no superior.

a) Largo = 20 cm, ancho = 15 cm, alto = 25 cm

b) Largo = 2 m, ancho = 150 cm, alto = 8 dm

c) Largo = 0,2 dm, ancho = 1,5 cm, alto = 40 mm

a) $A = 20 \cdot 15 + 2 \cdot 15 \cdot 25 + 2 \cdot 20 \cdot 25 = 2050 \text{ cm}^2$

$V = 20 \cdot 15 \cdot 25 = 7500 \text{ cm}^3$

b) $A = 2 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}8 = 8{,}6 \text{ m}^2$

$V = 2 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}8 = 2{,}4 \text{ m}^3$

c) $A = 2 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 31 \text{ cm}^2$

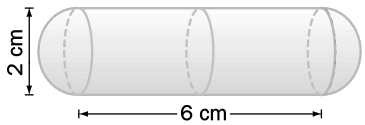
$V = 2 \cdot 1{,}5 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^3$

13.77. Un depósito con forma de ortoedro y totalmente lleno de agua contiene 25 litros de este líquido. Dos de sus dimensiones son 40 y 50 centímetros, respectivamente. Calcula la medida de la tercera dimensión.

$25 \text{ L} = 25 \text{ dm}^3 = 25\,000 \text{ cm}^3$

La medida de la tercera dimensión será $\dfrac{25000}{40 \cdot 50} = 12{,}5$ cm.

13.78. (TIC) Para almacenar cierto medicamento contra las inflamaciones óseas de caballos, se quiere construir cápsulas con forma de cilindro y semiesferas en sus extremos tal y como muestra la figura. Calcula la cantidad de superficie que se precisa para construir cada cápsula, así como su volumen en cm³.



El área total será la suma del área lateral del cilindro y el área de la esfera.

Por tanto: $A_T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 6 + 4 \cdot 3{,}14 \cdot 1^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$

El volumen será la suma de los volúmenes del cilindro y de la esfera.

Por tanto: $V = 3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 6 + \dfrac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1^3 \approx 23 \text{ cm}^3$

13.79. Una persona respira 16 veces por minuto. Cada vez introduce en sus pulmones 4,25 decilitros de aire. ¿Cuántos metros cúbicos de aire ha inspirado en un día entero? ¿Y en una semana?

$24 \cdot 60 \cdot 16 \cdot 4{,}25 = 97\,920 \text{ dL} = 9792 \text{ L} = 9792 \text{ dm}^3 = 9{,}792 \text{ m}^3$ de aire al día

$9{,}792 \cdot 7 = 68{,}544 \text{ m}^3$ de aire a la semana

13.80. (TIC) Para transportar tierra se utilizan camiones capaces de mover 4,5 metros cúbicos como máximo. ¿Cuántos camiones serán necesarios para transportar la tierra cavada en una zanja de 5 metros de larga, 10 de ancha y 2 de profunda, suponiendo que al remover la tierra, esta aumenta en $\frac{1}{8}$ su volumen primitivo?

El volumen de la zanja será: $V = 5 \cdot 10 \cdot 2 = 100$ m^3.

El volumen de la tierra extraída después de removerla será: $V = 100 \times \left(1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{900}{8} = 112{,}5 \text{ m}^3$.

El número de camiones necesario será: $\frac{112{,}5}{4{,}5} = 25$.

13.81. (TIC) Juan no ha cerrado bien el grifo del agua. ¿Cuántos litros se han desperdiciado si cada minuto gotean 5 centímetros cúbicos de agua y el grifo ha permanecido abierto durante 24 horas?

$24 \cdot 60 \cdot 5 = 7200$ cm^3 = 7,2 dm^3 = 7,2 L

13.82. Se quiere abrir un cortafuegos para evitar el avance de un incendio forestal. Si se tarda 8,5 minutos en cavar un metro cúbico de tierra, ¿cuánto se tardará en abrir una zanja de 100 m de larga, 2 de ancha y 0,25 de profunda?

El volumen de la zanja es: $V = 100 \cdot 2 \cdot 0{,}25 = 50$ m^3.

La zanja tardará en excavarse, por tanto, $50 \cdot 8{,}5 = 425$ minutos = 7 horas 5 minutos.

13.83. Queremos que un estanque con forma de ortoedro sea capaz de contener 8,5 m^3 de agua. ¿Qué altura deberá tener si se sabe que su base posee 500 dm^2 de superficie?

$A_{\text{BASE}} =$ 500 dm^2 = 5 m^2

La altura será: $h = \frac{V}{A_{\text{BASE}}} = \frac{8{,}5}{5} = 1{,}7$ m.

13.84. (TIC) El decímetro cúbico de mercurio tiene una masa de 13,6 kilogramos.

a) Calcula el peso de 2 litros de mercurio.

b) Indica el volumen, en centímetros cúbicos, que ocuparán 450 gramos de mercurio.

a) 2 L = 2 dm^3; por tanto, pesarán $2 \cdot 13{,}6 = 27{,}2$ kg.

b) 450 g = 0,45 kg; por tanto, ocuparán $\frac{0{,}45}{13{,}6} \approx 0{,}033$ dm^3 = 33 cm^3.

13.85. De una lata de conservas se desprendió el papel que rodeaba el envase. Se midieron las dimensiones del papel y se obtuvo como resultado 14 centímetros de base y 4 de altura.

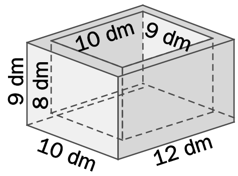
Calcula el volumen de la lata.

Calculamos el radio de la base: $2 \cdot \pi \cdot r = 14 \Rightarrow r \approx 2{,}23$ cm.

El volumen es, por tanto: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 2{,}23^2 \cdot 4 = 62{,}46$ cm^3.

13.86. (TIC) Un decímetro cúbico del material con que está construido el recipiente representado en la figura pesa 7,8 kilogramos.

Calcula cuánto pesa el recipiente.



El volumen de la figura será la diferencia entre el volumen del ortoedro exterior y el volumen del ortoedro interior.

Volumen del ortoedro exterior: $V_1 = 9 \cdot 10 \cdot 12 = 1080$ dm^3

Volumen del ortoedro interior: $V_2 = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$ dm^3

Volumen del material: $V = V_1 - V_2 = 1080 - 720 = 360$ dm^3

El recipiente pesa 360 · 7,8 = 2808 kg.

13.87. Las dimensiones de una caja son: 36, 24 y 30 centímetros. En ella se quieren introducir paquetes con forma de ortoedro de aristas 5, 9 y 6 centímetros.

¿Cuántos paquetes caben en la caja?

A lo largo caben: 36 : 9 = 4 paquetes.

A lo ancho caben: 24 : 6 = 4 paquetes.

A lo alto caben: 30 : 5 = 6 paquetes.

En total caben: 4 · 4 · 6 = 96 paquetes.

Nota: Por ser el largo, ancho y alto de la caja múltiplos del largo, ancho y alto de cada paquete, respectivamente, cabe un número exacto de paquetes, quedando todo el espacio de la caja ocupado.

Por esta razón, también se puede calcular el número de paquetes que entran en la caja dividiendo el volumen de la misma por el volumen de cada paquete.

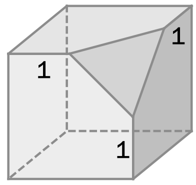
Volumen de la caja: 36 · 24 · 30 = 25 920 cm^3

Volumen de cada paquete: 9 · 6 · 5 = 270 cm^3

Caben: 25 920 : 270 = 96 paquetes.

AMPLIACIÓN

13.88. En un vértice de un cubo de 2 decímetros de arista damos un corte y queda la figura que ves. ¿Cuál es el área, en decímetros cuadrados, de lo que queda de cubo?



a) $\frac{29}{2}$ **b)** $\frac{71}{2}$ **c)** 21 **d)** $\frac{45}{2}$

Hay tres caras que no hemos tocado, siendo su superficie $3 \cdot 2^2 = 12$ dm^2. En las tres caras restantes hemos quitado un triángulo rectángulo isósceles de cateto 1, es decir, nos queda un pentágono de área $2^2 - \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{7}{2}$ dm^2.

Así pues, la figura resultante tendrá área $12 + 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{45}{2}$ dm^2, la respuesta d.

13.89. El área de cada una de las tres caras adyacentes de un prisma rectangular es $\frac{7}{2}$, 6 y 21 centímetros cuadrados. ¿Cuál es, en centímetros cúbicos, el volumen de dicho prisma?

a) 126 **b)** $\frac{147}{2}$ **c)** 21

d) **Faltan datos para contestar**

Llamando a, b y c a las dimensiones del prisma, tenemos que $ab = \frac{7}{2}$, $ac = 6$, $bc = 21$, y nos piden abc.

Multiplicando estas igualdades, resulta que $(a \cdot b \cdot c)^2 = 21^2$, de donde el volumen es $a \cdot b \cdot c = 21$ cm^3, la respuesta c.

13.90. Un niño junta 42 cubitos de 1 centímetro de lado para formar un prisma rectangular. Si el perímetro de la base es 18 centímetros, la altura del prisma, en centímetros, es:

a) 3 **b)** 6 **c)** 2 **d)** 7

Llamando a, b y c a las dimensiones del prisma, resulta que son números enteros positivos que cumplen que $a \cdot b \cdot c = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ y $2 \cdot (a + b) = 18$.

La única posibilidad es que a y b sean 2 y 7, por lo que $c = 3$, la respuesta a.

13.91. Un bote cilíndrico de bolas de tenis contiene 3 bolas perfectamente ajustadas. ¿Qué proporción del volumen del bote está ocupado por las bolas?

a) $\frac{2\pi}{3}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{\pi}{4}$ **d)** $\frac{3}{4}$

Llamando r al radio de cada bola, el cilindro tendrá radio r y altura $6r$.

Así pues, el volumen del cilindro es $V = \pi r^2 \cdot 6r$, y el volumen ocupado por las tres bolas será $3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$, de donde la proporción pedida es $\frac{4\pi r^3}{6\pi r^3} = \frac{2}{3}$, la respuesta b.

13.92. La base circular de un tanque de agua tiene una superficie de 1 metro cuadrado. Introducimos en el tanque un cubo de hierro de 20 centímetros de arista. ¿Qué altura, en cm, sube el agua del tanque?

a) $\frac{\pi}{0,8}$ **b)** $\frac{0,8}{\pi}$ **c)** 0,8 **d)** 8

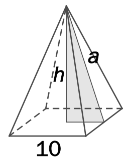
El agua subirá una altura *h* cm tal que el volumen del cilindro de base 1 m^2 = 10 000 cm^2 y altura *h* coincida con el volumen del cubo de hierro.

Así pues, 10 000 · *h* = 20^3, es decir, $h = \frac{20^3}{10^4}$ = 0,8 cm, la respuesta c.

13.93. El área lateral de una pirámide cuadrangular regular es 260 centímetros cuadrados. Si el área total es 360 centímetros cuadrados, el volumen de la pirámide, en centímetros cúbicos es:

a) 400 **b)** 1560 **c)** 130 **d)** 160

El área de la base es 360 – 260 = 100 cm^2, por lo que la arista de la base es de 10 cm.



Por otra parte, cada cara lateral medirá $\frac{260}{4}$ = 65 cm^2, con lo que si *a* es la apotema de la pirámide, tenemos que $65 = \frac{10 \cdot a}{2} \Rightarrow a = 13$ cm.

Por último, la altura *h* verificará $h^2 + 5^2 = 13^2$, de donde *h* = 12 cm, y el volumen pedido es $V = \frac{10^2 \cdot 12}{3}$ = 400 cm^3, la respuesta a.

AUTOEVALUACIÓN

13.1. Un cubo pequeño tiene por lado *a* centímetros, y otro más grande tiene por lado el doble que el anterior.

a) Escribe los volúmenes de ambos cubos.

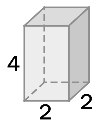
b) ¿Cuántas veces es mayor el volumen del cubo más grande?

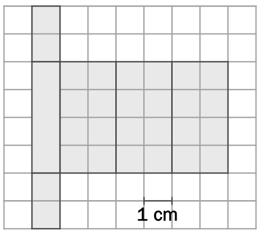
a) $V_1 = a^3$

$V_2 = (2a)^3 = 8a^3$

b) El cubo mayor tiene por volumen ocho veces el volumen del cubo menor.

13.2. Dibuja el desarrollo y calcula el área total y el volumen del prisma de la figura. Las medidas están dadas en centímetros.





$A = 4 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 40$ cm^2

$V = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ cm^3

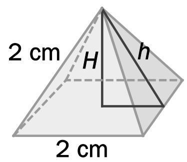
13.3. Un cono tiene 4 cm de radio de la base y 3 cm de altura. Calcula su área total y su volumen.

La generatriz del cono es $g = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ cm.

El área total es $A_T = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 5 + 3{,}14 \cdot 4^2 = 113{,}04$ cm^2.

El volumen es $V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 3}{3} = 50{,}24$ cm^3.

13.4. La pirámide de la figura tiene por base un cuadrado de lado 2 cm y los triángulos que forman las cuatro caras laterales son equiláteros.



a) Halla la altura *h* de cada una de las caras laterales y la altura *H* de la pirámide.

b) Calcula el área y el volumen de la pirámide.

a) $h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ cm

$H = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{2}$ cm

b) Área de la base: $A_B = 2^2 = 4$ cm^2

Área lateral: $A_L = 4\,\dfrac{2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm^2

Área total: $A_T = A_B + A_L = 4 + 4\sqrt{3} \approx 10{,}93$ cm^2

Volumen: $V = \dfrac{A_B \cdot H}{3} = \dfrac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} \approx 1{,}89$ cm^3

13.5. ¿Es posible desarrollar en el plano una esfera? Calcula el área y el volumen de una esfera de 10 cm de diámetro.

No es posible desarrollar una esfera en el plano.

Área: $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 = 314$ cm^2

Volumen: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^3}{3} = 523{,}3$ cm^3

13.6. Transforma en litros los siguientes volúmenes.

a) 11 dm^3 **b) 0,02 dam^3** **c) 250 000 cm^3**

a) 11 dm^3 = 11 L

b) 0,02 dam^3 = 20 000 dm^3 = 20 000 L

c) 250 000 cm^3 = 250 dm^3 = 250 L

13.7. Transforma en centímetros cúbicos las siguientes capacidades.

a) 3 L **b) 45 cL** **c) 250 000 mL**

a) $3 \text{ L} = 3 \text{ dm}^3 = 3000 \text{ cm}^3$

b) $45 \text{ cL} = 0{,}45 \text{ L} = 0{,}45 \text{ dm}^3 = 450 \text{ cm}^3$

c) $250\,000 \text{ mL} = 250 \text{ L} = 250 \text{ dm}^3 = 250\,000 \text{ cm}^3$

13.8. Un trozo de tubería de poliuretano de 5 m de largo tiene forma de cilindro de 3 cm de radio. Calcula la superficie de ese trozo de tubería.

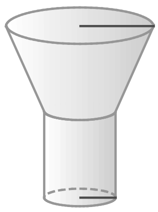
$A = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 500 = 14\,130 \text{ cm}^2 \approx 1{,}41 \text{ m}^2$

13.9. El embudo de la figura está formado por un tronco de cono y un cilindro.

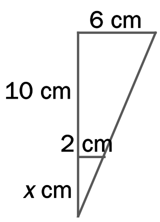
Las medidas del tronco de cono son de 6 centímetros de radio de la base superior y 2 de radio de la base inferior.

Las alturas del tronco de cono y del cilindro son de 10 centímetros cada una.

Calcula el volumen total del embudo.



El volumen del tronco de cono será la diferencia entre el volumen del cono completo y el del cono sobrante:



Observemos la figura. Aplicando la semejanza de triángulos:

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{x+10}{6} \Rightarrow 6x = 2x + 20 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5 \text{ cm}$

El volumen del tronco de cono es, por tanto:

$V_1 = \dfrac{3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 15}{3} - \dfrac{3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 5}{3} = 544{,}27 \text{ cm}^3$

El volumen del cilindro es $V_2 = 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 10 = 125{,}6 \text{ cm}^3$.

El volumen de la figura es, por tanto, $V = V_1 + V_2 = 669{,}87 \text{ cm}^3$.

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Investiga y crea > El arte de los poliedros

Las pirámides de Egipto son algunos de los muchos edificios con forma poliédrica. La mayor parte de las casas pueden descomponerse con facilidad en poliedros sencillos. Seguramente podrás ver a tu alrededor numerosos ejemplos.

Además de para la construcción, los poliedros han sido utilizados por artistas de todas las épocas en pinturas, esculturas, joyas… Incluso se conservan imágenes en piedra de los poliedros regulares de yacimientos neolíticos.

13.1. **En la imagen de la izquierda aparece un dodecaedro de la época etrusca.**

¿Quiénes fueron los etruscos? Investiga y escribe un breve resumen.

Actividad de investigación. Al hablar de los etruscos, deberían mencionar la época en la que vivieron, su localización geográfica y su relación con los romanos.

13.2. **No está clara la función que podía tener ese objeto. Viendo la foto, ¿para qué crees que se podía utilizar?**

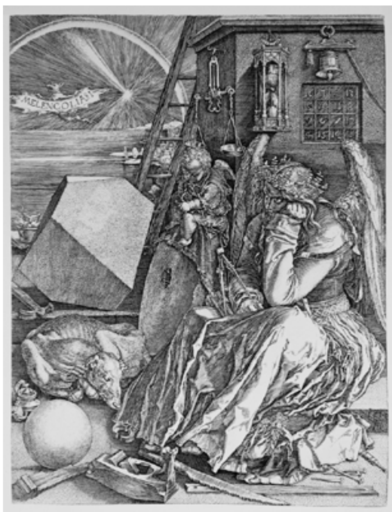
Posiblemente fuera un juguete, o un elemento decorativo.

13.3. **En el libro *La divina proporción*, Luca Pacioli utilizó los dibujos de Leonardo da Vinci. El título del libro se refiere al "número de oro". ¿Sabes qué número es? ¿Cómo se utiliza este número en el arte?**

El "número de oro" es $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, y se usa en arte para construir figuras cuyos lados guarden esa proporción, que se considera especialmente armoniosa. De hecho, también se lo conoce como la "divina proporción".

13.4. **El pintor Alberto Durero estudió los poliedros regulares y semirregulares, y los utilizó en sus obras. En el cuadro que aparece a la derecha puedes ver un poliedro. Si te fijas bien, verás que en la parte superior derecha aparece un cuadrado mágico, con los números que puedes ver bajo estas líneas.**

16	**3**	**2**	**13**
5	**10**	**11**	**8**
9	**6**	**7**	**12**
4	**15**	**14**	**1**



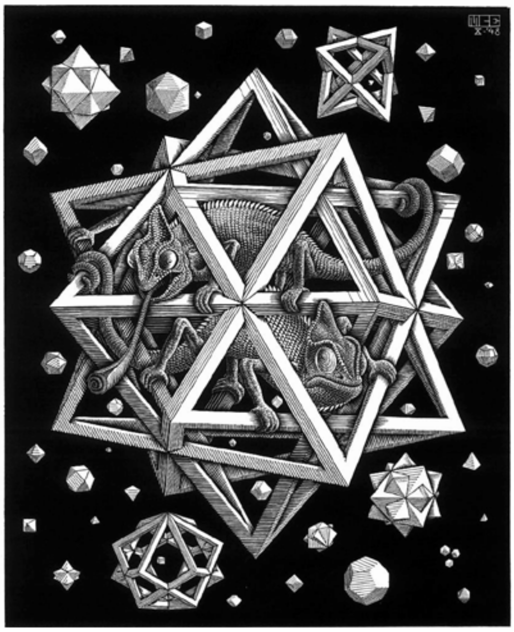
¿Qué tiene de especial? Intenta construir un cuadrado mágico de 3 × 3 usando los números del 1 al 9.

En www.e-sm.net/2esoz71 encontrarás numerosas actividades sobre los cuadrados mágicos.

En el cuadrado de Durero aparecen los 16 primeros números naturales, dispuestos de forma que la suma de cada fila y de cada columna es siempre 34. El cuadrado 3 × 3 podría ser el siguiente:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

13.5. El artista holandés M. C. Escher utilizó conceptos matemáticos en muchas de sus obras.



Generalmente se basaba en el uso de las simetrías y en juegos visuales con la perspectiva. En su obra *Estrellas*, que aparece a la izquierda, Escher utiliza más de 15 poliedros distintos. Seguramente no conocerás los nombres de todos, pero intenta localizar en el cuadro por lo menos los cinco poliedros regulares.

En el dibujo aparecen repetidos varias veces los poliedros pedidos. Por el tamaño, es posible que algunos no se vean bien. Se puede buscar en internet un dibujo ampliado. El dodecaedro, por ejemplo, es fácil de localizar, en la parte inferior derecha.

13.6. Crea tu propia obra de arte. Puede ser un dibujo o pintura, una escultura hecha con cualquier material, una composición utilizando varios objetos, etc. La única condición que debe cumplir es que aparezcan cuerpos geométricos, ya sean poliedros o no.

Actividad manipulativa de tipo artístico.

Calcula con ingenio > Juegos matemáticos

En una de las actividades anteriores, has resuelto un cuadrado mágico. Muchos juegos o pasatiempos matemáticos tienen relación con los números y con las figuras geométricas. Todo el mundo ha jugado alguna vez con el cubo de Rubik, y seguramente habrás intentado resolver un sudoku.

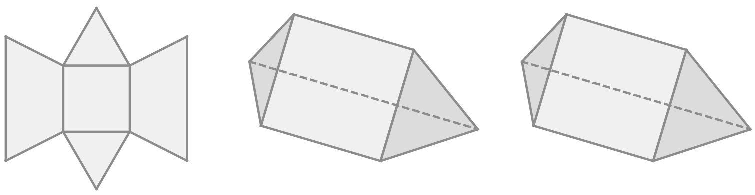
En los juegos de construcción o en los puzles es fundamental estudiar las piezas que vamos a utilizar para poder colocarlas en su lugar correspondiente.

13.1. Alguna vez has intentado resolver el cubo de Rubik y lo has dejado por imposible? En internet hay varios sitios en los que se explican métodos para lograrlo.

En www.e-sm.net/2esoz72 se explica cada paso con unas claras animaciones. Si no tienes un cubo de Rubik a mano, puedes encontrar uno virtual en www.e-sm.net/2esoz73.

Actividad de juegos en la web.

13.2. Vamos a construir el puzle de dos piezas más difícil del mundo: un tetraedro. Es posible que en tu instituto tengan un material para formar poliedros ensamblando polígonos de plástico. Si no es así, tendrás que construir tú las piezas. Son dos poliedros iguales.

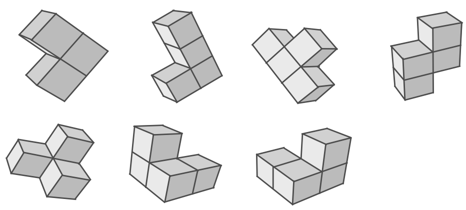


A la izquierda tienes el desarrollo de cada pieza y cómo quedarían una vez montadas.

¿Puedes resolver el puzle y formar un tetraedro con las dos piezas? Parece muy sencillo, pero a la mayoría no le resultará fácil

El puzle puede resultar sorprendentemente complicado a algunos alumnos, pero realmente es muy sencillo. Si se unen las piezas colocadas de forma simétrica por las caras cuadradas y se gira una, aparece el tetraedro.

13.3. Para el último puzle, el cubo soma, necesitas construir las piezas. Para hacerlo se utilizan 27 cubos, preferiblemente de madera, para que sean más resistentes, y se pegan formando las siete piezas que aparecen en la ilustración. Con las piezas grandes que resultan, trata de formar un cubo.



Actividad manipulativa.

Aprende a pensar > Deme un ortoedro de leche

Los poliedros que aparecen con más frecuencia en nuestra vida cotidiana son los ortoedros. Las cajas de zapatos o los envases de leche son solo dos ejemplos de los muchos que encontramos cada día.

13.1. Coge un brik de leche o zumo y mide sus dimensiones. Calcula su volumen. ¿Es mayor o menor que el que indica el envase? ¿Por qué? Haz lo mismo con un bote de refresco.

El volumen obtenido será algo mayor que el que figura en el envase, ya que siempre queda un pequeño espacio vacío.

13.2. ¿Por qué se emplean contenedores con forma de ortoedro, y no pirámides o icosaedros, por ejemplo?

Los ortoedros tienen un número pequeño de caras, y son fácilmente apilables.

13.3. Las capas 1, 3, 5 y 6 que aparecen en el dibujo son de polietileno. La capa 2 es de cartón, y representa el 75% del peso del envase, y la 4, de aluminio, el 5%. Por eso estos envases no pueden tirarse al contenedor de papel, deben ir al cubo amarillo. El material reciclado no puede reutilizarse para fabricar briks, a diferencia del vidrio de las botellas. Sin embargo, el transporte de las botellas de vidrio y su reciclado, para el que se necesitan altas temperaturas, generan CO_2. ¿Qué envase prefieres tú? ¿Por qué? Justifica tus motivos a tus compañeros.

Debate sobre el tema en http://matematicas20.aprenderapensar.net.

Debate con los compañeros y en la web.

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Ana María Álvarez, Marina Díaz, Mariano García, Francisco José Valencia, Fernando Alcaide**

Edición: **Rafaela Arévalo, Eva Béjar, José Miguel Gómez**

Revisión contenidos: **Jesús García Gual**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Modesto Arregui, Estudio "Haciendo el león", Jurado y Rivas**

Fotografía: **CONTACTO; AGE FOTOSTOCK**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

Impreso en España – *Printed in Spain*