

11.5. Septiembre 2010 - Opción A

Problema 11.5.1 (3 puntos) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente de un parámetro real a :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 7a \end{pmatrix}$$

- Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro a .
- Resuélvase el sistema para el valor de a para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.
- Resuélvase el sistema para $a = 0$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 7a \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x+ & y- & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z = & 22 \\ x- & 4y+ & az = & 7a \end{cases}$$

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & a & 7a \end{array} \right), \quad |A| = 15 - 5a = 0 \implies a = 3$$

- Si $a \neq 3 \implies |A| = 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 3$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & 3 & 21 \end{array} \right), \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \implies$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

Claramente se observa que $F_3 = F_2 - F_1$, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b)

$$\begin{cases} x+ & y- & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z = & 22 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 + (1/5)\lambda \\ y = -4 + (4/5)\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 11.5.2 (3 puntos) El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a 2 m^2 . Calcúlense las dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana.

Solución:

LLlamamos x a la longitud del lado horizontal e y a la longitud del lado vertical.

$$x \cdot y = 2 \implies y = \frac{2}{x}, \quad p(x, y) = 2x + 2y$$

$$C(x, y) = 50(x + 2y) \implies C(x) = 50 \left(x + \frac{4}{x} \right) = \frac{50(x^2 + 4)}{x}$$

$$C'(x) = \frac{50(x^2 - 4)}{x^2} = 0 \implies x = 2, \quad x = -2$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$C'(x)$	+	-	+
$C(x)$	creciente	decreciente	creciente

El mínimo estaría en el punto $x = 2$, es decir, el coste mínimo sería de 200 euros y correspondería a unas dimensiones de 2 metros de lado horizontal y 1 metro de lado vertical.

Problema 11.5.3 (2 puntos) Sean tres sucesos A , B y C de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A|C) \geq P(B|C), \quad P(A|\bar{C}) \geq P(B|\bar{C})$$

Razónese cuál de las siguientes desigualdades es cierta:

$$\text{a) } P(A) < P(B); \quad \text{b) } P(A) \geq P(B)$$

Nota.- \bar{C} representa el suceso complementario de C .

Solución:

$$P(A|C) \geq P(B|C) \implies \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \geq \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \implies P(A \cap C) \geq P(B \cap C)$$

$$P(A|\bar{C}) \geq P(B|\bar{C}) \implies \frac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} \geq \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} \implies P(A \cap \bar{C}) \geq P(B \cap \bar{C})$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap C) + P(A \cap \bar{C}) = P(A) \\ P(B \cap C) + P(B \cap \bar{C}) = P(B) \end{array} \right\} \implies P(A) \geq P(B)$$

Luego es falso que $P(A) < P(B)$, se cumple que:

$$P(A) \geq P(B)$$

Problema 11.5.4 (2 puntos) Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 320. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 elementos.

- Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media de la distribución normal sea mayor o igual que 50.
- Determinése el intervalo de confianza del 95 % para la media de la distribución normal, si la media muestral es igual a 4820.

Solución:

$$N(\mu, 320), \quad n = 36$$

a)

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies z_{\alpha/2} = \frac{E\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{300}{320} = 0,9375$$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \implies$$

$$P(Z < 0,9375) = 1 - \frac{\alpha}{2} \implies 0,8289 = 1 - \frac{\alpha}{2} \implies \alpha = 0,3422$$

$$P(|\mu - \bar{X}| > 50) = \alpha = 0,3422 \text{ nivel de significación}$$

b)

$$\bar{X} = 4820, \quad z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$IC = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (4715,47; 4924,53)$$

11.6. Septiembre 2010 - Opción B

Problema 11.6.1 (3 puntos) Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 m². Puede comprar la pintura a dos proveedores, *A* y *B*. El proveedor *A* le ofrece una pintura con un rendimiento de 6m² por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor *B* tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de 8 m² por kg. Ningún proveedor le puede proporcionar más de 75 kg y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.

Solución:

Llamamos x al número de kg de pintura comprados al proveedor A y, llamamos y al número de kg de pintura comprados al proveedor B .

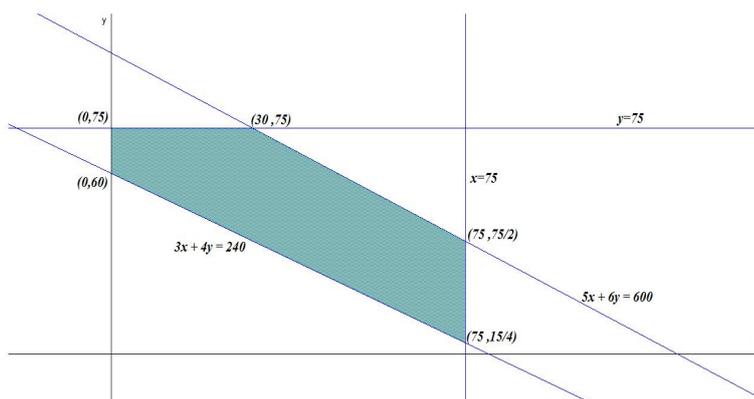
Proveedor	Rendimiento	Precio
A	6	1
B	8	1,2

Función Objetivo: Mín $z(x, y) = x + 1,2y$

Sujeto a:

$$\begin{cases} 6x + 8y \geq 480 \\ x + 1,2y \leq 120 \\ x \leq 75 \\ y \leq 75 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x + 4y \geq 240 \\ 5x + 6y \leq 600 \\ x \leq 75 \\ y \leq 75 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Tenemos:



$$\begin{cases} z(0, 75) = 90 \\ z(0, 60) = 72 \\ z(30, 75) = 120 \\ z(75, 75/2) = 120 \\ z(75, 15/4) = 79,5 \end{cases}$$

El mínimo coste, de 72 euros, corresponde a la compra de 0 kg del proveedor A y 60 kg del proveedor B .

Problema 11.6.2 (3 puntos) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - a & \text{si } x \leq -1 \\ -3x^2 + b & \text{si } -1 < x < 1 \\ \log x + a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcúlese a , b , para que f sea continua en todos los puntos.

b) Para $a = 0$, $b = 3$, represéntese gráficamente la función f .

c) Para $a = 0$, $b = 3$, calcúlese la integral definida $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Nota.- La notación \log representa logaritmo neperiano.

Solución:

a) En $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (2x^2 - a) = 2 - a, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} (-3x^2 + b) = -3 + b \implies a + b = 5$$

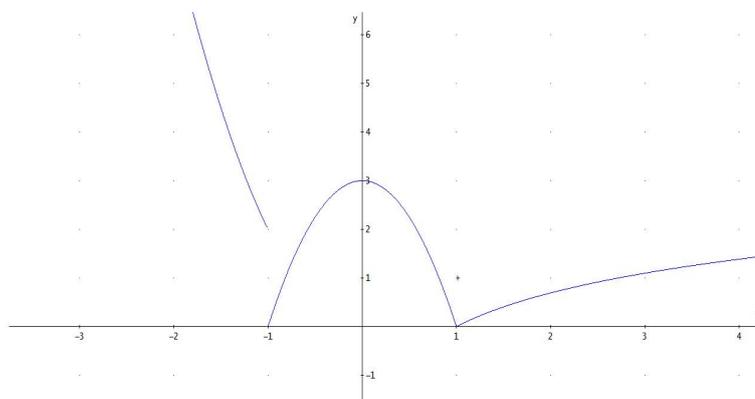
En $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (-3x^2 + b) = -3 + b, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (\log x + a) = a \implies a - b = -3$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = -3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

b) Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ -3x^2 + 3 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \log x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



c)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (-3x^2 + 3) dx = -x^3 + 3x \Big|_{-1}^1 = 4$$

Problema 11.6.3 (2 puntos) Se consideran los siguientes sucesos:

- Suceso A = La economía de un cierto país está en recesión.

- Suceso B = Un indicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión.

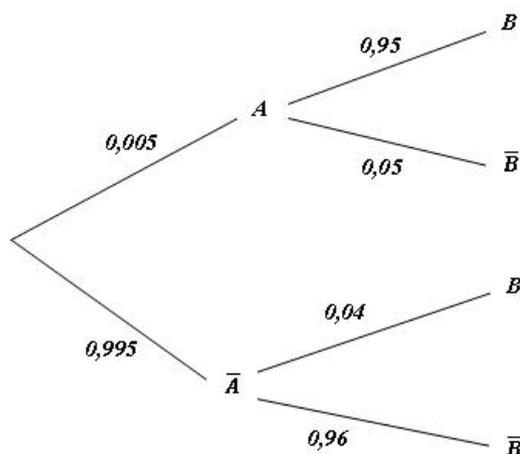
Se sabe que:

$$P(A) = 0,005, \quad P(B|A) = 0,95, \quad P(\bar{B}|\bar{A}) = 0,96$$

- Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión.
- Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.

Nota.- La notación \bar{A} representa el suceso complementario de A .

Solución:



a)

$$P(\bar{B} \cap A) = 0,005 \cdot 0,05 = 0,00025$$

b)

$$P(B) = 0,005 \cdot 0,95 + 0,995 \cdot 0,04 = 0,04455$$

Problema 11.6.4 (2 puntos) Para estimar la media de una población con distribución normal de desviación típica igual a 5, se ha extraído una muestra aleatoria simple de tamaño 100, con la que se ha obtenido el intervalo de confianza (173,42;175,56) para dicha media poblacional.

- Calcúlese la media de la muestra seleccionada.
- Calcúlese el nivel de confianza del intervalo obtenido.

Solución:

$$N(\mu, 5), \quad n = 100, \quad (173,42; 175,56)$$

$$\begin{cases} \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{5}{10} = 173,42 \\ \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{5}{10} = 175,56 \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{X} = 174,49 \\ z_{\alpha/2} = 2,14 \end{cases}$$

a) $\bar{X} = 174,49$

b) $z_{\alpha/2} = 2,14 \implies P(Z < 2,14) = 1 - \frac{\alpha}{2} \implies 0,9838 = 1 - \frac{\alpha}{2} \implies \alpha = 0,0324 \implies NC = 1 - \alpha = 1 - 0,0324 = 0,9676.$

Nivel de Confianza = 96,76%