# Determinantes

***Ejercicio nº 1.-***

**Halla el valor de los siguientes determinantes. En el apartado b), calcula , además, los posibles valores de *t* para que el determinante sea cero:**

**a)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 4 & t \end{vmatrix}$

***Ejercicio nº 2.-***

**a) Calcula el valor del determinante:**

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**b) Resuelve la ecuación:**

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

***Ejercicio nº 3.-***

**Calcula el valor de los siguientes determinantes.**

**a)** $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$

***Ejercicio nº 4.-***

**Calcula cuánto vale el primer determinante y halla los valores de *t* que anulan el segundo determinante:**

**a)** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix}$

***Ejercicio nº 5.-***

**Calcula el valor del determinante propuesto en a) y resuelve la ecuación propuesta en b):**

a) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

***Ejercicio nº 6.-***

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2a+2b & b \\ 2c+2d & d \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix}$

***Ejercicio nº 7.-***

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 4$, halla el valor de los siguientes determinates:

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ x-a & y-b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ x & y \end{vmatrix}$

***Ejercicio nº 8.-***

**Indica si son ciertas o no las siguientes igualdades. Razona tu respuesta:**

a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 0$

***Ejercicio nº 9.-***

**Indica si son ciertas o no las siguientes igualdades. Razona tu respuesta:**

a) $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3x & 3y \\ 3a & 3b \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$

***Ejercicio nº 10.-***

Si $A$ y $B$ son dos matrices $2 \times 2$, tales que $|A| = 2$ y $|B| = -4$, calcula:

$|A^2|$; $|-A|$; $|2A|$; $|AB|$; $|A^t|$; $|A^{-1}|$

***Ejercicio nº 11.-***

**Averigua cuál es el rango de la siguiente matriz:**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 12 & -11 & 7 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 12.-***

**Estudia el rango de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 13.-***

**Calcula el rango de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 14.-***

**Halla el rango de la siguiente matriz:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 15.-***

**Obtén el rango de esta matriz:**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 16.-***

**Determina el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de *a*:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & -3 & 0 \\ 4 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 17.-***

**Estudia el rango de esta matriz, según los valores de *t*:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & t & 4 & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 18.-***

**Estudia el rango de la matriz *M* según los valores de *t:***

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 19.-***

**Determina cuál es el rango de la matriz *A*, según los valores de $\lambda$:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 20.-***

**Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de *a*:**

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 5 & a \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 21.-***

**a) Encuentra los valores de $a$ para los que la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**no es inversible.**

**b) Calcula $A^{-1}$ para $a = 2$.**

***Ejercicio nº 22.-***

**Halla una matriz, $X$, tal que $AX + B = 0$, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 23.-***

**Calcula, si es posible, la inversa de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$$

**Para los casos en los que $a = 2$ y $a = 0$.**

***Ejercicio nº 24.-***

**Halla $X$ tal que $AX = B$, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 25.-***

**a) Calcula para qué valores de $\lambda$ existe la inversa de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$$

**b) Calcula $A^{-1}$ para $\lambda = 0$.**

# Soluciones Determinantes

***Ejercicio nº 1.-***

**Halla el valor de los siguientes determinantes. En el apartado b), calcula , además, los posibles valores de $t$ para que el determinante sea cero:**

**a)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 4 & t \end{vmatrix}$

***Solución:***

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1$

b) Calculamos el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 4 & t \end{vmatrix} = t^2 + 4(1-t) - 2t(1-t) - t = t^2 + 4 - 4t - 2t + 2t^2 - t = 3t^2 - 7t + 4$$

Veamos para qué valores de $t$ se anula el determinante:

$$3t^2 - 7t + 4 = 0 \;\rightarrow\; t = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{6} = \frac{7 \pm 1}{6} \;\rightarrow\; \begin{cases} t = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \\ t = \dfrac{6}{6} = 1 \end{cases}$$

El determinante vale cero cuando $t = \frac{4}{3}$ y cuando $t = 1$.

***Ejercicio nº 2.-***

**a) Calcula el valor del determinante:**

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**b) Resuelve la ecuación:**

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

***Solución:***

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7$

b) Desarrollamos el determinante y lo igualamos a cero:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 2^{\underline{a}} \end{array} \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$$

Hay dos soluciones $x_1 = -1;\ x_2 = 1$

***<u>Ejercicio nº 3.-</u>***

**Calcula el valor de los siguientes determinantes.**

**a)** $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$

***Solución:***

a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20$

b) $$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3 - (1-x) - (1-x) = (1-x)^3 - 2(1-x) = (1-x)\left[(1-x)^2 - 2\right] =$$

$$= (1-x)\left[1 - 2x + x^2 - 2\right] = (1-x)\left(x^2 - 2x - 1\right) = -x^3 + 3x^2 - x - 1$$

***<u>Ejercicio nº 4.-</u>***

**Calcula cuánto vale el primer determinante y halla los valores de *t* que anulan el segundo determinante:**

**a)** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix}$

***Solución:***

a) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 12$

b) $\begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = t^3 + 4t - 2t - 4t = t^3 - 2t = t(t^2 - 2) = 0 \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 2 = 0 \;\rightarrow\; t^2 = 2 \;\rightarrow\; t = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay tres soluciones $t_1 = 0;\ t_2 = -\sqrt{2};\ t_3 = \sqrt{2}$

***<u>Ejercicio nº 5.-</u>***

**Calcula el valor del determinante propuesto en a) y resuelve la ecuación propuesta en b):**

**a)** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

***Solución:***

a) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

b) Desarrollamos el determinante e igualamos a cero el resultado:

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{COLUMNAS}}{=} \begin{matrix} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \end{matrix} \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; a = \pm 1$$

(1) Desarrollamos por la 2ª columna

Hay dos soluciones $a_1 = -1;\ a_2 = 1$

***<u>Ejercicio nº 6.-</u>***

**Si** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$, **calcula el valor de los siguientes determinantes:**

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 2a + 2b & b \\ 2c + 2d & d \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix}$$

***Solución:***

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2a+2b & b \\ 2c+2d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & b \\ 2d & d \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 0 = 2 \cdot 3 = 6$$

(1) El segundo determinante es 0, pues tiene dos columnas proporcionales.

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} = 2^2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 = 12$$

***<u>Ejercicio nº 7.-</u>***

**Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 4$, halla el valor de los siguientes determinates:**

**a)** $\begin{vmatrix} a & b \\ x-a & y-b \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ x & y \end{vmatrix}$

***Solución:***

a) Sumamos la 2ª fila la 1ª.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x-a & y-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 4$$

b) $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = -4$

c) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ x & y \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 = 12$

***<u>Ejercicio nº 8.-</u>***

**Indica si son ciertas o no las siguientes igualdades. Razona tu respuesta:**

**a)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 0$

***Solución:***

a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ x & y \end{vmatrix} = 2y - 2x$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y - 2x$

$\Bigg\}$ Son iguales $\rightarrow$ La igualdad es cierta.

b) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^2 & a^3 \end{vmatrix} = a^4 - a^4 = 0 \quad \rightarrow$ También es cierta esta igualdad

***<u>Ejercicio nº 9.-</u>***

**Indica si son ciertas o no las siguientes igualdades. Razona tu respuesta:**

**a)** $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3x & 3y \\ 3a & 3b \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$

***Solución:***

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} \end{vmatrix} = 2x \cdot \frac{b}{2} - 2y \cdot \frac{a}{2} = xb - ya = \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$

Por tanto, la igualdad es verdadera.

b) $\begin{vmatrix} 3x & 3y \\ 3a & 3b \end{vmatrix} = 9xb - 9ay = 9(xb - ay) = 9\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$

Luego, es falsa.

***<u>Ejercicio nº 10.-</u>***

**Si $A$ y $B$ son dos matrices $2 \times 2$, tales que $|A| = 2$ y $|B| = -4$, calcula:**

$|A^2|; \quad |-A|; \quad |2A|; \quad |AB|; \quad |A^t|; \quad |A^{-1}|$

***Solución:***

Sabemos que, si $A$ y $B$ son dos matrices $2 \times 2$, entonces:

1) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ 2) $|k \cdot A| = k^2 |A|$ 3) $|A^t| = |A|$

Por tanto:

- $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = 2^2 = 4$
- $|-A| = |(-1) \cdot A| = (-1)^2 |A| = 1 \cdot |A| = |A| = 2$

- $|2A| = 2^2|A| = 4|A| = 4 \cdot 2 = 8$

- $|AB| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot (-4) = -8$

- $|A^t| = |A| = 2$

Para hallar $|A^{-1}|$, vamos a tener en cuenta que $A \cdot A^{-1} = I$ y que existe $A^{-1}$, puesto que $|A| = 2 \neq 0$. Así:

- $|A \cdot A^{-1}| = |I| \;\rightarrow\; |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \;\rightarrow\; |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{2}$

***<u>Ejercicio nº 11.-</u>***

**Averigua cuál es el rango de la siguiente matriz:**

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{12} & \mathbf{-11} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Luego, $ran\,(M) \geq 2$. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 12 & -11 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 12 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Así, la 3ª fila es combinación lineal de las dos primeras.

Por tanto, $ran\,(M) = 2$.

***<u>Ejercicio nº 12.-</u>***

**Estudia el rango de la matriz:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

Luego, $ran\ (A) \geq 2$. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 17 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Las tres primeras filas son linealmente independientes.}$$

Por tanto, $ran\ (A) = 3$.

***Ejercicio nº 13.-***

**Calcula el rango de la matriz:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Por tanto, $ran\ (A) \geq 2$. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Las tres filas son linealmente independientes.}$$

Luego, $ran\ (A) = 3$

***Ejercicio nº 14.-***

**Halla el rango de la siguiente matriz:**

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M) \geq 2$$

Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la 3ª fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \quad \rightarrow$$

$\rightarrow$ Las tres primeras filas son linealmente independientes.

Por tanto, $ran\ (M) = 3$.

***Ejercicio nº 15.-***

**Obtén el rango de esta matriz:**

$$\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

***Solución:***

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Observamos que la 1ª y la 3ª columna son iguales. Luego podemos prescindir de la 3ª columna para calcular el rango de $M$.

Tomamos un menor de orden 2 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Por tanto, $ran\ (M) \geq 2$. Las dos primeras filas son linealmente independientes (y las dos primeras columnas).

Veamos si la 4ª columna depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\left(M\right) = 3$$

***Ejercicio nº 16.-***

**Determina el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de *a*:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & -\mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

Podemos prescindir de la 3ª columna, pues no influye en el rango.

Tomemos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Luego, ran $(A) \geq 2$.

Buscamos los valores de $a$ que hacen cero el determinante formado por las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 4a + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \quad \begin{cases} a = -1 \\ a = -3 \end{cases}$$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq -3 \rightarrow$ ran$(A) = 3$
- Si $a = -1$ o $a = -3 \rightarrow$ La 2ª fila depende linealmente de las otras dos $\rightarrow$ ran$(A) = 2$

***Ejercicio nº 17.-***

**Estudia el rango de esta matriz, según los valores de *t*:**

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{t} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{3} & \boldsymbol{t} & -\mathbf{2} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{4} & 2 \\ \boxed{0} & t & \boxed{4} & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix}$$

Observamos que la 4ª columna es el doble de la 1ª. Luego, podemos prescindir de ella para obtener el rango.

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

Así, ran $(M) \geq 2$.

Buscamos los valores de $t$ que hacen cero el determinante formado por las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{vmatrix} = t^2 + 4t - 12 = 0 \;\rightarrow\; t = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} \quad \begin{cases} t = 2 \\ t = -6 \end{cases}$$

- Si $t \neq 2$ y $t \neq -6 \;\rightarrow\;$ ran$(M) = 3$
- Si $t = 2$ o $t = -6 \;\rightarrow\;$ La 2ª columna depende linealmente de la 1ª y 3ª.

Por tanto, ran $(M) = 2$.

***<u>Ejercicio nº 18.-</u>***

**Estudia el rango de la matriz *M* según los valores de *t:***

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{t} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{8-3}\boldsymbol{t} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & t & 3 & \boxed{2} \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Observamos que la 3ª columna es proporcional a la 1ª (es su triple); por tanto, podemos prescindir de ella para calcular el rango.

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Luego, ran $(M) \geq 2$.

Buscamos los valores de $t$ que hacen que el determinante formado por las columnas 1ª, 2ª y 4ª sea cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & t & 2 \\ 1 & 8-3t & -2 \end{vmatrix} = -2t + 8 - 3t + 4 - t - 2(8-3t) + 4 = 0 \text{ para cualquier valor de } t.$$

Por tanto, la 3ª fila depende linealmente de las dos primeras para cualquier valor de $t$.

Así, ran $(M) = 2$.

***Ejercicio nº 19.-***

**Determina cuál es el rango de la matriz *A*, según los valores de $\lambda$:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \lambda+\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \lambda & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \lambda & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & \lambda+1 & \boxed{1} \\ \lambda & \boxed{0} & 0 & \boxed{2} \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Luego, ran (*A*) $\geq$ 2.

Buscamos los valores de $\lambda$ que hacen cero el determinante formado por las columnas 2ª, 3ª y 4ª:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \lambda & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} = -2[2-\lambda(\lambda+1)] = -2[2-\lambda^2-\lambda] =$$

$$= 2\cdot[\lambda^2+\lambda-2] = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$
- Si $\lambda = 1 \rightarrow$ La 3ª columna depende linealmente de la 2ª y 4ª. Veamos qué ocurre con la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

- Si $\lambda = -2 \rightarrow$ La 3ª columna depende linealmente de la 2ª y 4ª. Veamos qué ocurre con la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

Por tanto, ran (*A*) = 3 para cualquier valor de $\lambda$.

***Ejercicio nº 20.-***

**Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de *a*:**

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 5 & a \end{pmatrix}$$

***Solución:***

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Luego, ran ($M$) $\geq$ 2. Las dos primeras filas son linealmente independientes para cualquier valor de $a$.

Buscamos los valores de $a$ que hacen que el determinante formado por las columnas 1ª, 3ª y 4ª sea igual a cero:

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix} = 2a^2+6-5a-3a = 2a^2-8a+6 = 2\left(a^2-4a+3\right)=0 \;\rightarrow\; a^2-4a+3=0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; a=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}\;\begin{cases} a=3 \\ a=1 \end{cases}$$

- Si $a=1$ $\rightarrow$ Sabemos que la 1ª columna depende linealmente de las dos últimas. Veamos que ocurre con la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; \text{La 2ª columna depende linealmente de las dos últimas.}$$

Por tanto, ran ($M$) $=$ 2.

- Si $a=3$ $\rightarrow$ Sabemos que la 1ª columna depede linealmente de las dos últimas. Veamos que ocurre con la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0. \;\text{ Por tanto, ran}\left(M\right)=3$$

***Ejercicio nº 21.-***

**a) Encuentra los valores de *a* para los que la matriz:**

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**no es inversible.**

**b) Calcula $A^{-1}$ para $a = 2$.**

***Solución:***

a) La condición necesaria y suficiente para que exista $A^{-1}$ es que $|A| \neq 0$.
Calculamos el determinante de $A$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2 - (a-2) + a \cdot (a-2) - 2a - 2 = 3a^2 - 5a + 2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad a = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Por tanto, la matriz no es inversible para $a = 1$ y para $a = \dfrac{2}{3}$.

b) Para $a = 2$, tenemos que $|A| = 4$. La matriz $A$ queda:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \; Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \; (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

***<u>Ejercicio nº 22.-</u>***

**Halla una matriz, *X*, tal que $AX + B = 0$, siendo:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \quad \textbf{y} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

***Solución:***

Calculamos $|A|$ para ver si existe $A^{-1}$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Existe } A^{-1}$$

Despejamos $X$ en la ecuación dada:

$$AX + B = 0 \quad \rightarrow \quad AX = -B \quad \rightarrow \quad A^{-1}AX = -A^{-1}B \quad \rightarrow \quad X = -A^{-1}B$$

Hallamos la matriz inversa de $A$:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&-1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&-1&-1\\2&0&2\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj(A))^t=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&-1&-1\\2&0&2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\-2&0&-2\end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz $X$:

$$X=-A^{-1}B=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\-2&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1\\-4&-4\\4&1\end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-2&-4\\2&-2\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\2&0\end{pmatrix}$$

***<u>Ejercicio nº 23.-</u>***

**Calcula, si es posible, la inversa de la matriz:**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}+\boldsymbol{a}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}+\boldsymbol{a}&\boldsymbol{a}\end{pmatrix}$$

**Para los casos en los que $\boldsymbol{a}=\mathbf{2}$ y $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.**

***Solución:***

Para $a=2$, queda:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&1\\1&3&2\end{pmatrix}$$

Entonces, $|A|=-2$. En este caso, sí existe $A^{-1}$. La calculamos

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&5&-8\\0&-2&2\end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&5&-2\\2&-8&2\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj(A))^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{-5}{2}&1\\-1&4&-1\end{pmatrix}$$

Para $a=0$, queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como las dos primeras filas son iguales, $|A| = 0$.

Por tanto, en este caso, no existe $A^{-1}$.

***Ejercicio nº 24.-***

**Halla $X$ tal que $AX = B$, siendo:**

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

***Solución:***

Calculamos $|A|$ para ver si existe $A^{-1}$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{Existe } A^{-1}$$

Despejamos $X$ de la ecuación dada:

$$AX = B \;\rightarrow\; A^{-1}AX = A^{-1}B \;\rightarrow\; X = A^{-1}B$$

Hallamos la matriz inversa de $A$:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz $X$:

$$X = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -15 & -5 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

***Ejercicio nº 25.-***

**a) Calcula para qué valores de $\lambda$ existe la inversa de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$$

**b) Calcula $A^{-1}$ para $\lambda = 0$.**

***Solución:***

a) La condición necesaria y suficiente para que exista $A^{-1}$ es que $|A| \neq 0$.
Calculamos el determinante de $A$:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 4\lambda - 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 4 = 3\lambda^2 + 6\lambda + 3 = 3(\lambda + 1)^2$$

$$|A| = 0 \quad \rightarrow \quad 3(\lambda+1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1$$

Por tanto, existe $A^{-1}$ para $\lambda \neq -1$.

b) Para $\lambda = 0$, la matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Adj\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj\,(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$