3 Sistemas de ecuaciones lineales

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Amor se escribe sin hache

[Esta novela es una historia de amor contada con un humor disparatado. En la siguiente escena, los protagonistas, Sylvia y Zambombo, llegan a una isla después de naufragar el barco donde viajaban. Una vez encendida una hoguera admirable, Zambombo determinó construir una cabaña.]

–¡Sí, sí! –palmoteó Sylvia–. Una cabaña... y tu amor... ¡Ah! ¡Qué dichosa soy!

Zamb se dirigió a la entrada del bosque y transportó a la playa unos cuantos árboles que yacían en el suelo derribados, tal vez, por alguna tormenta. Calculó la resistencia de los árboles midiendo su diámetro y su longitud y escribió en su cuadernito:

$$A + B = (A + B) - (A + B) \cdot (A + B) + (A + B)$$

Elevó al cuadrado el primer término, y con gran sorpresa suya, que no creía saber tantas matemáticas, obtuvo:

$$(A + B)^2 = (A + B) - (A + B) \cdot (A + B) + (A + B)$$

Y sustituyendo esto por las cifras averiguadas, logró:

$$73^2 = (10 + 10)$$

La resistencia de los troncos del árbol era de 730 kilogramos.

Puso los troncos apoyados entre sí, formando dos vertientes, en número de quince. De manera que cuando Zamb y Sylvia se metieron debajo, los kilos de árbol que se les cayeron encima, al desplomarse la cabaña, fueron:

$$730 \cdot 15$$

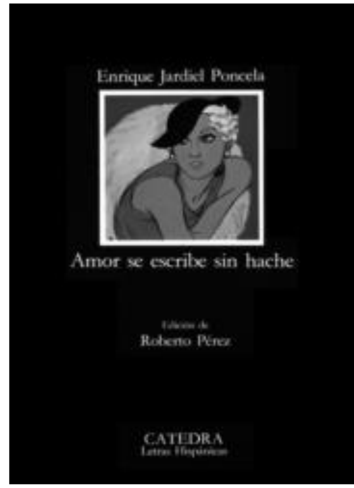
o sea: 10.950.

Ambos se desmayaron a consecuencia del traumatismo. Al volver en sí, era de noche.*

* Puede calcularse que, por cada 100 kilos que le caen en la cabeza a un ser humano, permanece desmayado un minuto. Como en 10.950 kilos hay, aproximadamente, 109 veces 100 kilos, resulta que Zambombo y Sylvia estuvieron desmayados durante 109 minutos, o sea, dos horas menos once minutos. No nos explicamos, por lo tanto, por qué al volver en sí era ya de noche.

ENRIQUE JARDIEL PONCELA

Amor se escribe sin hache
Enrique Jardiel Poncela



En esta obra, como en casi todas las de Jardiel Poncela, el humor es el recurso literario predominante y, a través de un manejo casi surrealista del mismo, logra que los lectores (cuando se trata de novelas) y los espectadores (cuando se trata de piezas teatrales) revisen su percepción de los problemas humanos más importantes. En esta novela aborda el tema del amor a través de la historia disparatada que viven los protagonistas, Sylvia y Zambombo.

El texto anterior forma parte de una escena donde los protagonistas han llegado a una isla después de naufragar el barco donde viajaban. Allí tienen que enfrentarse a cuatro problemas: localizar geográficamente el sitio donde se encuentran, hacer fuego, construir una choza y encontrar víveres.

Zambombo aborda el problema de la orientación con técnicas disparatadas, como la medida de la velocidad del viento mediante una regla de tres:

Para ello, por medio de dos rayas, señaló en el suelo su estatura, que era de un metro y setenta y cinco. Colocó en una de las rayas un papelito y midió, reloj en mano, lo que el viento tardaba en llevar el papel a la otra rayita. Tardó cuatro segundos. Y Zamb razonó por medio de la regla de tres:

1,75 metros los recorre en 4 segundos

1.000 metros (o sea un kilómetro) los recorrerá en x

De donde x era igual a 1.000 multiplicado por 4 y partido por 1,75.

Hizo las operaciones, contando por los dedos, y comprobó que el viento corría que se las pelaba.

Luego Zambombo, como si fuera un robinsón, se dedica a hacer fuego frotando dos trozos de madera. Cuando consigue una llamita tras seis horas de trabajo, su propio sudor se la apaga. Sylvia le dice: «¿Qué? ¿No puedes hacer fuego?». Y él le contesta: «Podré, porque traigo cerillas, pero si no las hubiera traído, no sé cómo nos las habríamos arreglado...».

Una vez encendida una hoguera admirable, Zambombo determinó construir una cabaña tal como se describe en el texto elegido.

Finalmente, el cuarto problema, el de los víveres, lo resuelven comiendo los productos vegetales anunciados en el cartel que vieron al llegar en la playa. Veinte días después, Sylvia había adelgazado dieciocho libras y Zambombo, diecinueve. Pero se recuperaron cuando aprendieron a pescar "piscis rodolphus valentinus".

La ingenuidad romántica de Zambombo desencadena el desenlace de esta aventura y le sirve a Jardiel para plantear la siguiente y llegar, finalmente, a la conclusión moral de la novela.

Jardiel Poncela utiliza aquí el lenguaje algebraico como un recurso humorístico, una aplicación *novedosa*, porque en Matemáticas y en las otras ciencias se emplea para expresar propiedades o resolver problemas como este: «Sylvia tiene 24 años; tiene el doble de la edad que tenía Zambombo cuando ella tenía la edad que él tiene ahora. ¿Qué edad tiene Zambombo?».

Sea x la edad que tiene Zambombo.

Entonces: $24 = 2(x - (24 - x)) \rightarrow 24 = 2(2x - 24) \rightarrow 12 = 2x - 24 \rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$ años

Sistemas de ecuaciones lineales

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ 2x - 2y = 4 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -1 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ 2x - 2y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \end{array}\right.$ b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -1 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

002 Escribe tres ecuaciones equivalentes a estas.

a) $x - 2 = 7$ b) $2x = -3$ c) $\dfrac{x}{2} - 4 = 6$

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$x - 9 = 0$ $2x - 4 = 14$ $2 - x = -7$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$4x + 6 = 0$ $1 - 6x = 10$ $10x + 15 = 0$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$x - 8 = 12$ $16 - 2x = -24$ $3x = 60$

003 Escribe dos sistemas equivalentes a estos.

a) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 3 \end{array}\right\}$

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ 3x - y = 5 \end{array}\right\}$

b) Aunque el sistema es incompatible, podemos considerar sistemas equivalentes. Los siguientes sistemas se han obtenido multiplicando las ecuaciones por una constante:

$\left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 3 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 4x - 4y = 6 \end{array}\right\}$

ACTIVIDADES

001 Escribe una ecuación con tres incógnitas de coeficientes 4, -1 y 1, respectivamente, y con término independiente -2.
Calcula tres soluciones de esta ecuación.

La ecuación es $4x - y + z = -2$, y tres soluciones son:

$x = 1$, $y = 6$ y $z = 0$

$x = -1$, $y = 0$ y $z = 2$

$x = 0$, $y = 2$ y $z = 0$

002 **Determina una solución de este sistema:**

$$\left.\begin{array}{r}-x-y+z=0\\ -2x=0\\ y-z=0\end{array}\right\}$$

Respuesta abierta. Por ejemplo: $x=0,\ y=2,\ z=2$

003 **Clasifica estos sistemas según su número de soluciones.**

a) $\left.\begin{array}{r}-2x+y=2\\ 2x-y=-2\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}-x+2y=4\\ 2x-4y=1\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}3x+2y=1\\ 2x-y=3\end{array}\right\}$

a) Tiene infinitas soluciones. El sistema es compatible indeterminado.

b) No tiene solución. El sistema es incompatible.

c) $\left.\begin{array}{r}3x+2y=1\\ 2x-y=3\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=-1\end{array}\right.$

Tiene solución única. El sistema es compatible determinado.

004 **Convierte este sistema en un sistema escalonado y resuélvelo.**

$$\left.\begin{array}{r}x+y-z=1\\ -y+2z=1\\ -x=5\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rrrr}x&+y&-z&=1\\ &-y&+2z&=1\\ -x&&&=5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{rrrr}x&+y&-z&=1\\ &-y&+2z&=1\\ &-y&-z&=6\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{rrrr}x&+y&-z&=1\\ &-y&+2z&=1\\ &&z&=7\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-5\\ y=13\\ z=7\end{array}\right.$$

005 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.**

a) $\left.\begin{array}{rrrr}x&+2y&-2z&=1\\ -x&-y&+z&=0\\ &y&-z&=1\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{rrrr}&y&-z&=1\\ 2x&-2y&+z&=3\\ 3x&&-2z&=7\end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{rrr|r}1&2&-2&1\\ -1&-1&1&0\\ 0&1&-1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&2&-2&1\\ 0&1&-1&1\\ 0&1&-1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&2&-2&1\\ 0&1&-1&1\\ 0&0&0&0\end{array}\right)$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y-2z=1\\ y-z=1\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-1\\ y=1+\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.\quad\lambda\in\mathbb{R}$$

b) $\left(\begin{array}{rrr|r}0&1&-1&1\\ 2&-2&1&3\\ 3&0&-2&7\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}2&-2&1&3\\ 0&1&-1&1\\ 3&0&-2&7\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}2&-2&1&3\\ 0&1&-1&1\\ 0&-6&7&-5\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}2&-2&1&3\\ 0&1&-1&1\\ 0&0&1&1\end{array}\right)$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x-2y+z=3\\ y-z=1\\ z=1\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=3\\ y=2\\ z=1\end{array}\right.$$

006 Resuelve aplicando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{array}{r} y+z=-5 \\ 2x-y=0 \\ x+z=-4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x-y+z+t=4 \\ 3x-2y-t=-2 \\ x+2y-2z-t=0 \\ y+z-4t=-4 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\to \left.\begin{array}{r} x \quad +z=-4 \\ y+z=-5 \\ -z=3 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{array}\right.$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & -30 & -34 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & -30 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 22 \end{array}\right)$

$\to \left.\begin{array}{r} x+2y-2z-t=0 \\ y+z-4t=-4 \\ 14z-30t=-34 \\ -2t=22 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=-19 \\ y=-22 \\ z=-26 \\ t=-11 \end{array}\right.$

007 Discute estos sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y-2z=1 \\ -x-y+z=0 \\ y-z=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -2x+y-z=1 \\ 2x-2y-z=3 \\ -y-2z=7 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

Sistema incompatible

008 Discute utilizando el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} -x+y+z-2t=-5 \\ 2x-y-t=0 \\ x+z-3t=-2 \\ -x+y-2z+t=0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Sistema incompatible

009 Discute y resuelve este sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=1 \\ -x-2y+z=0 \\ x-y+\lambda z=2 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & \lambda & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & \lambda & 2 \\ 0 & -3 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & 3 & -1-2\lambda & -3 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & \lambda & 2 \\ 0 & -3 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \end{array}\right)$$

- Si $\lambda = 0 \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible

- Si $\lambda \neq 0 \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & \lambda & 2 \\ 0 & -3 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible determinado

$$\left.\begin{array}{r} x-y+\lambda z=2 \\ -3y+(\lambda+1)z=2 \\ -\lambda z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1+2\lambda}{3\lambda} \\ y=\dfrac{1-\lambda}{3\lambda} \\ z=\dfrac{1}{\lambda} \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$$

010 Discute y resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-2\\ 2x-2y=1\\ x-\lambda z=3 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -\lambda & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2 & 5\\ 0 & 2 & -\lambda-1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

- Si $\lambda \neq 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible $\rightarrow \begin{cases} x=3\\ y=\dfrac{5}{2}\\ z=0 \end{cases}$

- Si $\lambda = 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-2\\ 2y-2z=5\\ 0=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=3+a\\ y=\dfrac{5+2a}{2}\\ z=a \end{cases} \text{ con } a \in \mathbb{R}$$

011 Escribe mediante ecuaciones este sistema, y resuélvelo aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-2z=1\\ -2x+y-z=-2\\ -2y+z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -1 & -2\\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 5 & -5 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 5 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-2z=1\\ 5y-5z=0\\ -5z=-5 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=1\\ y=1\\ z=1 \end{cases}$$

012 Determina la expresión matricial de este sistema, y resuélvelo como si fuera una ecuación matricial.

$$\left.\begin{array}{r} -3x+y+2z=0\\ -x-2y+z=-2\\ x-y+z=1 \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \rightarrow B=\begin{pmatrix} 0\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}$$

$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

013 **Utiliza el teorema de Rouché-Fröbenius para determinar si estos sistemas son compatibles, y resuélvelos aplicando el método de Gauss.**

a) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -2 \\ -x - y + 2z &= 0 \\ x - 4y + 3z &= -2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 1 \\ -2x - 3y + z &= 0 \\ -x - z &= 7 \end{aligned}\right\}$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{array}\right)$

$|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 2$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x - 4y + 3z &= -2 \\ -5y + 5z &= -2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2 + 5\lambda}{5} \\ y = \dfrac{2 + 5\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

$|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$$

Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

014 **Mediante el teorema de Rouché-Fröbenius, determina si el sistema es compatible.**

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z + t &= 1 \\ x - 3y + z - t &= 0 \\ 3x - 2y &= 1 \\ y - 2z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -8 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$$

Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

015 **Discute este sistema aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius.**

$$\left.\begin{aligned} x + y - z + t &= 1 \\ -x - 3y + z - 2t &= 0 \\ -2y - t &= 1 \\ y - 2z &= -3 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$$

Rango (A) = Rango (A^*) = 3 < n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

016 **Añade una ecuación al sistema de ecuaciones para que se convierta en:**

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y - z = 1 \\ -x - y + z = 3 \end{array}\right\}$$

a) Un sistema compatible determinado.
b) Un sistema compatible indeterminado.
c) Un sistema incompatible.

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y - z = 1 \\ -x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \end{array}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y - z = 1 \\ -x - y + z = 3 \\ x + y = 4 \end{array}\right\}$$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y - z = 1 \\ -x - y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\}$$

017 **Evalúa si se puede aplicar la regla de Cramer a estos sistemas de ecuaciones.**

a) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = -2 \\ x - y + z = 4 \\ -2y + z = -3 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z + t = 0 \\ x - 3y + z - 2t = -2 \\ -2y + 3t = 3 \end{array}\right\}$$

a) El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

b) El número de ecuaciones no es el mismo que el número de incógnitas, por tanto, no se puede aplicar la regla de Cramer.

018 **Escribe dos sistemas de ecuaciones lineales a los que se pueda aplicar la regla de Cramer y que cumplan cada una de estas condiciones.**

a) Tenga 3 ecuaciones. **b) Tenga 4 incógnitas.**

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+y=0 \\ y+z=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x-y+z=0 \\ y+z=0 \end{array}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=4 \\ x+y-z-t=0 \\ 2x+y-z=2 \\ y+z+t=3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z-t=4 \\ x+y-z-t=-2 \\ x+y-z=-1 \\ y+z+2t=-1 \end{array}\right\}$$

019 **Evalúa si se puede aplicar la regla de Cramer a este sistema, y si se puede, calcula $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$ y resuelve el sistema.**

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y-z=2 \\ x-y+2z=1 \\ -2x+z=-1 \end{array}\right\}$$

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \rightarrow \text{Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 2$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 1$$

020 **Resuelve este sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer, si es posible.**

$$\left.\begin{array}{r} -2x+y-z+t=4 \\ -x-3y+z-2t=-8 \\ -2y-t=-4 \\ y-2z=-1 \end{array}\right\}$$

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

$\rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ -8 & -3 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -9 & 1 \\ 0 & -11 & 17 & -2 \\ 0 & -6 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -9 & 1 \\ -11 & 17 & -2 \\ -6 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & -8 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 20 & -3 & 5 \\ -1 & -8 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & -3 & 5 \\ -4 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & -11 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -1 & -11 & -2 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A_t| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -3 & 20 \\ -1 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 20 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 42$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -\frac{1}{3} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1}{3} \qquad t = \frac{|A_t|}{|A|} = \frac{14}{3}$$

021 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones mediante la regla de Cramer.**

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y-3z=0 \\ x-\ y+4z=1 \\ 2x+3y-7z=-1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+\ y-\ z=0 \\ x-\ y+\ z=1 \\ 2x+4y-4z=-1 \end{array}\right\}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\,(A) = \text{Rango}\,(A^*) = 2 < \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible indeterminado

Consideremos el sistema: $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 3z \\ x - \quad y &= 1 - 4z \end{aligned}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3z & 2 \\ 1-4z & -1 \end{vmatrix} = 5z - 2 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 3z \\ 1 & 1-4z \end{vmatrix} = 3 - 15z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{5z-2}{-5} = \frac{2-5z}{5} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{3-15z}{-5} = \frac{15z-3}{5}$$

La solución es: $x = \dfrac{2-5\lambda}{5}$, $y = \dfrac{15\lambda - 3}{5}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\,(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\,(A) = \text{Rango}\,(A^*) = 2 < \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} x + y &= z \\ x - y &= 1 - z \end{aligned}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} z & 1 \\ 1-z & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix} = 1 - 2z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{1-2z}{-2} = \frac{2z-1}{2}$$

La solución es: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{2\lambda - 1}{2}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

022 **Resuelve el sistema utilizando la regla de Cramer.**

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - 3z + 2t &= 4 \\ -x - 3y + z - 2t &= 0 \\ x - 2y - 2z &= 4 \\ 3x + 4y - 4z + 4t &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\,(A) < 4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 4 + 3z - 2t \\ -x - 3y = -z + 2t \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 + 3z - 2t & 1 \\ -z + 2t & -3 \end{vmatrix} = -12 - 8z + 4t \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{12 + 8z - 4t}{5}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 4 + 3z - 2t \\ -1 & -z + 2t \end{vmatrix} = 8 + z - 2t \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-8 - z + 2t}{5}$$

La solución es:

$$x = \frac{12 + 8\lambda - 4\mu}{5}, \quad y = \frac{-8 - \lambda + 2\mu}{5}, \quad z = \lambda, \quad t = \mu \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

023 **Resuelve este sistema:** $\left.\begin{array}{r} 5x - y + 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{array}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = \text{Rango } (A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado

La solución es: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

024 **Escribe un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de cuatro ecuaciones y que tenga:**

a) Solución única.

b) Infinitas soluciones.

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z + t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \\ 2x + y - z \quad\;\; = 0 \\ y + z + t = 0 \end{array}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z + t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \\ x + y \quad\quad\quad\;\; = 0 \\ y + z + t = 0 \end{array}\right\}$$

025 **Discute este sistema en función de los valores de m.**

$$\left.\begin{array}{r}-x+y-z=-1\\4x-2y+2z=2m\\-3x-2y+mz=-4\end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\4 & -2 & 2\\-3 & -2 & m\end{vmatrix}=4-2m$$

- Si $m\neq 2\rightarrow |A|\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m=2\rightarrow |A|=0$

$$\begin{vmatrix}-1 & 1\\4 & -2\end{vmatrix}=-2\neq 0\rightarrow \text{Rango }(A)=2$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\4 & -2 & 4\\-3 & -2 & -4\end{vmatrix}=2\neq 0\rightarrow \text{Rango }(A^*)=3$$

Rango $(A)\neq$ Rango $(A^*)\rightarrow$ Sistema incompatible

026 **Discute el sistema según los valores de a.**

$$\left.\begin{array}{r}2x-3y+z=0\\x-ay-3z=0\\5x+3y-z=0\end{array}\right\}$$

El sistema es homogéneo $\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)\rightarrow$ Sistema compatible

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\1 & -a & -3\\5 & 3 & -1\end{vmatrix}=7a+63$$

- Si $a\neq -9\rightarrow |A|\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=3=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a=-9\rightarrow |A|=0$

$$\begin{vmatrix}2 & -3\\1 & 9\end{vmatrix}=21\neq 0\rightarrow \text{Rango }(A)=2<\text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible indeterminado

027 **Resuelve este sistema en función de los valores de m.**

$$\left.\begin{array}{r}-x+y-z=-1\\4x-2y+2z=2m\\-3x-2y+mz=-4\end{array}\right\}$$

Si $m \neq 2 \rightarrow |A| = 4 - 2m \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2m & -2 & 2 \\ -4 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m^2 + 6m - 4 = -2(1-m)(2-m)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2m & 2 \\ -3 & -4 & m \end{vmatrix} = -2(m^2 + m - 7) \quad |A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2m \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 22 - 10m$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-2(1-m)(2-m)}{4-2m} = -1 + m$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2(m^2+m-7)}{4-2m} = \frac{m^2+m-7}{m-2}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{22-10m}{4-2m} = \frac{5m-11}{m-2}$$

028 **Resuelve el sistema según los valores de *a*.**

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - ay - 3z &= 0 \\ 5x + 3y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

- Si $a \neq -9 \rightarrow |A| = 7a + 63 \neq 0$
  Como el sistema es homogéneo la solución es: $x = 0$, $y = 0$, y $z = 0$
- Si $a = -9 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \rightarrow \text{Consideramos el sistema: } \left.\begin{aligned} 2x - 3y &= -z \\ x + 9y &= 3z \end{aligned}\right\}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -z & -3 \\ 3z & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & 3z \end{vmatrix} = 7z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{7z}{21} = \frac{z}{3}$$

La solución es: $x = 0$, $y = \dfrac{\lambda}{3}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

029 **Resuelve por los métodos clásicos: reducción, igualación o sustitución, los sistemas de ecuaciones y clasifícalos atendiendo a su número de soluciones.**

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \\ -3x + 2y &= -11 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 4x - 6y &= 10 \\ -6x + 9y &= -15 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x + 6y &= 5 \\ -3x - 9y &= 1 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 2x + 5y &= 4 \\ -x - y &= 1 \\ 3x + 2y &= -5 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} 3y + z &= 3 \\ 3x + 4y &= 11 \\ -2x + 2z &= -8 \end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} 3a - 2b &= -1 \\ -2a - b &= -4 \\ a + 4b &= 3 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}2x+5y=1\\-3x+2y=-11\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=3\\y=-1\end{array}\right.$

Sistema compatible determinado

b) $\left.\begin{array}{r}4x-6y=10\\-6x+9y=-15\end{array}\right\}\rightarrow 2x-3y=5\rightarrow x=\dfrac{5+3\lambda}{2},\quad y=\lambda\quad \text{con } \lambda\in\mathbb{R}$

Sistema compatible indeterminado

c) $\left.\begin{array}{r}2x+6y=5\\-3x-9y=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}6x+18y=15\\-6x-18y=2\end{array}\right\}$

Sistema incompatible

d) $\left.\begin{array}{r}2x+5y=4\\-x-y=1\\3x+2y=-5\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-3\\y=2\end{array}\right.$

Sistema compatible determinado

e) $\left.\begin{array}{r}3y+z=3\\3x+4y=11\\-2x+2z=-8\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}3y+z=3\\3x+4y=11\\x+3y=7\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}3y+z=3\\3x+4y=11\\-5y=-10\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=2\\z=-3\end{array}\right.$

Sistema compatible determinado

f) $\left.\begin{array}{r}3a-2b=-1\\-2a-b=-4\\a+4b=3\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}6a-4b=-2\\-6a-3b=-12\\a+4b=3\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}a=1\\b=2\\1+8\neq 3\end{array}\right\}$

Sistema incompatible

030 **Dado el sistema $\left.\begin{array}{r}x+2y=1\\3x-y=2\end{array}\right\}$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax+by=c$ (distinta que las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.**

(Madrid. Junio 2004. Opción B. Ejercicio 2)

$$\left.\begin{array}{r}x+2y=1\\3x-y=2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}3x+6y=3\\-3x+y=-2\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{7}\\[2mm]y=\dfrac{1}{7}\end{array}\right.$$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r}x+2y=1\\3x-y=2\\7x+7y=6\end{array}\right\}$$

031 Resuelve aplicando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{aligned} 2x+3y+5z&=1\\ 4x+7y+13z&=-1\\ 2x+3y+7z&=-3\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x+2y+z&=1\\ x+y-z&=1\\ 2x+3y+z&=1\end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 5x+2y+3z&=5\\ -x+3y-2z&=12\\ x+y+z&=2\end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 3y+z&=3\\ 3x+4y&=11\\ -2x+2z&=-8\end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} x-2y-z&=-1\\ x-y+2z&=2\\ x+2y+z&=3\end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} -p+3q-r&=12\\ 3p+2r&=7\\ 5p-6q+4r&=5\end{aligned}\right\}$

g) $\left.\begin{aligned} 3x-y+2z&=7\\ -x+2y+5z&=-2\\ 3x+4y+19z&=8\end{aligned}\right\}$

h) $\left.\begin{aligned} 2a-4b-c&=-7\\ -3a+2b-3c&=-4\\ -a-3b-8c&=-12\end{aligned}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1\\ 4 & 7 & 13 & -1\\ 2 & 3 & 7 & -3\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 2 & -4\end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} 2x+3y+5z&=1\\ y+3z&=-3\\ 2z&=-4\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=3\\ z&=-2\end{aligned}\right.$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)$

$\to \left.\begin{aligned} x+2y+\ \ z&=1\\ -\ \ y-2z&=0\\ z&=-1\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=-2\\ y&=2\\ z&=-1\end{aligned}\right.$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 5\\ -1 & 3 & -2 & 12\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & -2 & 12\\ 5 & 2 & 3 & 5\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 4 & -1 & 14\\ 0 & -3 & -2 & -5\end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 4 & -1 & 14\\ 0 & 0 & -11 & 22\end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ z&=2\\ 4y-\ \ z&=14\\ -11z&=22\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=3\\ z&=-2\end{aligned}\right.$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 0 & 11\\ -2 & 0 & 2 & -8\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 11\\ 0 & 3 & 1 & 3\\ -2 & 0 & 2 & -8\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 11\\ 0 & 3 & 1 & 3\\ 0 & 8 & 6 & -2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 11\\ 0 & 3 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 10 & -30\end{array}\right)$

$\to \left.\begin{aligned} 3x+4y\qquad&=11\\ 3y+\ \ z&=3\\ 10z&=-30\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=2\\ z&=-3\end{aligned}\right.$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 2 & 4\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & -10 & -8\end{array}\right)$

$\to \left.\begin{aligned} x-2y-\ \ z&=-1\\ y+\ \ 3z&=3\\ -10z&=-8\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=\frac{3}{5}\\ z&=\frac{4}{5}\end{aligned}\right.$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & | & 12 \\ 3 & 0 & 2 & | & 7 \\ 5 & -6 & 4 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & | & 12 \\ 0 & 9 & -1 & | & 43 \\ 0 & 9 & -1 & | & 65 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & | & 12 \\ 0 & 9 & -1 & | & 43 \\ 0 & 0 & 0 & | & 22 \end{pmatrix}$

Sistema incompatible

g) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 7 \\ -1 & 2 & 5 & | & -2 \\ 3 & 4 & 19 & | & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & | & -2 \\ 3 & -1 & 2 & | & 7 \\ 3 & 4 & 19 & | & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & | & -2 \\ 0 & 5 & 17 & | & 1 \\ 0 & 10 & 34 & | & 2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & | & -2 \\ 0 & 5 & 17 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + \ \ 5z = -2 \\ 5y + 17z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{12-9\lambda}{5} \\ y = \dfrac{1-17\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

h) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & | & -7 \\ -3 & 2 & -3 & | & -4 \\ -1 & -3 & -8 & | & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & | & 12 \\ -3 & 2 & -3 & | & -4 \\ 2 & -4 & -1 & | & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & | & 12 \\ 0 & 11 & 21 & | & 32 \\ 0 & -10 & -17 & | & -31 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & | & 12 \\ 0 & 11 & 21 & | & 32 \\ 0 & 0 & 23 & | & -21 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \ 3y + \ \ 8z = 12 \\ 11y + 21z = 32 \\ 23z = -21 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{123}{23} \\ y = \dfrac{107}{23} \\ z = -\dfrac{21}{23} \end{array}\right.$

032 **Utiliza el método de Gauss para discutir los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.**

a) $\left.\begin{array}{r} 6x - 3y = 9 \\ -4x + 2y = -6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x - 3y = 2 \\ 2x + \ \ y = -1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - \ \ y + 2z = 4 \\ 2x - 2y + \ \ z = 6 \\ 5x - 5y + 4z = 16 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3a + 2b + 2c = 1 \\ 2a + \ \ b + \ \ c = 0 \\ 3b + 2c = -1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} -4p + 2q = -8 \\ 6p - 3q = 5 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 3x - 3y = 3 \\ 2x \qquad = 0 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - \ \ z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 5 \\ 5x + 7y + \ \ z = 1 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} 3a + \ \ b - \ \ c = 2 \\ -2a + \ 3b + 2c = 5 \\ 11b + 4c = 19 \end{array}\right\}$

a) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & | & 9 \\ -4 & 2 & | & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & | & 9 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & | & 2 \\ 2 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & | & 2 \\ 0 & -5 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ Sistema compatible determinado

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & -5 & 4 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado

e) $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 6 & -3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \to$ Sistema incompatible

f) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \to$ Sistema compatible determinado

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right)$

Sistema incompatible

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado

033 Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} y - x = z \\ x - z = y \\ y + z = x \end{array}\right\}$$

(Extremadura. Septiembre 2005. Repertorio A. Ejercicio 2)

$$\left.\begin{array}{r} -x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left.\begin{array}{r} -x + y - z = 0 \\ -2z = 0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right. \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

034 En un sistema hay, entre otras, estas dos ecuaciones:

$$x + 2y - 3z = 5 \quad \text{y} \quad 2x + 4y - 6z = -2.$$

¿Qué puede decirse de las soluciones del sistema?

(Cataluña. Septiembre 2005. Cuestión 1)

Como los coeficientes de las incógnitas son proporcionales y los términos independientes no lo son, el sistema es incompatible.

035 Dar un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea incompatible.

(Extremadura. Junio 2005. Repertorio B. Ejercicio 1)

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x-y-z=-1 \\ 2x+y+z=0 \end{array}\right\}$$

036 Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+2y-\ \ z=1 \\ x+\ \ y+2z=1 \end{array}\right\}$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ (distinta que las anteriores) de manera que el sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas resultante sea compatible indeterminado.

(Madrid. Junio 2004. Opción B. Ejercicio 2)

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y-\ \ z=1 \\ x+\ \ y+2z=1 \\ 5z=1 \end{array}\right\}$$

037 Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=4 \end{array}\right\}$:

a) Añade una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea incompatible.

b) Añade una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea compatible indeterminado. Resuelve el sistema.

(Cataluña. Junio 2000. Cuestión 3)

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=4 \\ 3x-2y+z=1 \end{array}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=4 \\ x+\ \ y\ \ \ \ \ =1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=5 \\ x+\ \ y\ \ \ \ \ =1 \\ x+\ \ y\ \ \ \ \ =1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=5 \\ x+\ \ y\ \ \ \ \ =1 \\ 0=0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2+5\lambda \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

038 Discute por el método de Gauss el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=2 \\ -x+3y+z=0 \\ -x+y+az=1 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1+a & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1-5a & -9 \end{array}\right)$$

- Si $a \neq \frac{1}{5} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1-5a & -9 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible determinado

- Si $a = \frac{1}{5} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible

039 Resolver el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array}\right\}$. Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x + y + \alpha z = \beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

(Madrid. Junio 2005. Opción B. Ejercicio 1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & -9 & \alpha-15 & \beta-5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+6 & \beta-5 \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible indeterminado debe ocurrir que:

$\alpha + 6 = 0 \rightarrow \alpha = -6$

$\beta - 5 = 0 \rightarrow \beta = 5$

040 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde a y b son números reales, halle los valores de a y b que hacen que las dos matrices conmuten, es decir, que hacen que se cumpla $AB = BA$.

(Cataluña. Año 2005. Serie 4. Cuestión 1)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \rightarrow \left.\begin{array}{c} 1 = 1 \\ a+b = a+b \\ 0 = 0 \\ 1 = 1 \end{array}\right\}$$

Los productos son iguales para cualquier valor de a y de b.

041 Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$.

¿Qué condiciones han de cumplir x, y y z para que las matrices A y B conmuten, es decir, para que $AB = BA$?

(Cantabria. Septiembre 2005. Bloque 2. Opción B)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z & y \\ 3x+4z & 3y \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z & 2z \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \rightarrow \left.\begin{aligned} x+2z &= x+3y \\ y &= 2x+4y \\ 3x+4z &= z \\ 3y &= 2z \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 3y-2z &= 0 \\ 2x+3y \qquad &= 0 \\ 3x \qquad +3z &= 0 \\ 3y-2z &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 2x+3y \qquad &= 0 \\ -9y+6z &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= -3\lambda \\ y &= 2\lambda \\ z &= 3\lambda \end{aligned}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

042 Escribe mediante ecuaciones estos sistemas.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{aligned} 2x+3y+5z &= 3 \\ x+2y-z &= -1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} a+4b &= -1 \\ 2a+3b &= 4 \\ a+5b &= 2 \\ -6a+7b &= 5 \end{aligned}\right\}$

043 Escribe en forma matricial estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{aligned} x+2y-3z &= -2 \\ -x-y+2z &= 3 \\ 3y-5z &= 0 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} p+q+r-s &= 3 \\ 2p-q+2s &= 5 \\ q+3r-5s &= -1 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x+y-z+t-v &= -1 \\ 2x-3z+6v &= 8 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x+y-z &= 3 \\ -x+z &= -7 \\ 2x+y+4z &= 5 \\ 3y-9z &= -1 \end{aligned}\right\}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

044 Escribe en forma matricial, y luego resuelve empleando la matriz inversa.

a) $\left.\begin{aligned} 4x - y &= 18 \\ 3x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x - z &= -7 \\ 2x + y - 3z &= -26 \\ 4y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix}$

$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix}$

$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$|A| = 6 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \\ z = 8 \end{cases}$

045 Discute los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius.

a) $\left.\begin{array}{r} x+3y-5z=-8 \\ 3x+6y-5z=0 \\ 4x+9y-10z=-8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 8x-6y+2z=-1 \\ 3x+y-z=10 \\ -x+3y-2z=5 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3a+2b-6c+3d=7 \\ a-b+2c-d=6 \\ 6a-b=3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} a+5b=7 \\ -2a+2b+3c=-2 \\ -a+3b+2c=1 \\ 4b+c=4 \end{array}\right\}$

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 6 & -5 \\ 4 & 9 & -10 \end{pmatrix}$ $\quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 9 & -10 & -8 \end{array}\right)$

$|A|=0$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \to \text{Rango }(A)=2$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 9 & -8 \end{vmatrix}=0 \to \text{Rango }(A^*)=2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

b) $A=\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

$|A|=-14\neq 0 \to$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado

c) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0 \to \text{Rango }(A)=2$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}=110\neq 0 \to \text{Rango }(A^*)=3$

Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) \to$ Sistema incompatible

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 12 & 3 & 12 \\ 0 & 8 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Rango $(A^*) = 2$

Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas

Sistema compatible indeterminado

046 **Resuelve, aplicando la regla de Cramer, estos sistemas compatibles determinados.**

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ -3x - 2y &= -1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3a + 2b + 2c &= 1 \\ 2a + b + c &= 0 \\ 3b + 2c &= -1 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2a - 3b &= 6 \\ -a + 5b &= -3 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 3x + 5y &= 33 + 2z \\ 3x &= 19 - y \\ 10 + 3z &= x + 2y \end{aligned}\right\}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 3 \qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = -4$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_a| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad |A_b| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad |A_c| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = -1 \qquad b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = -5 \qquad c = \dfrac{|A_c|}{|A|} = 7$

c) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_a| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 21$ $\qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = 3$ $\qquad b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = 0$

d) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 26 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 33 & 5 & -2 \\ 19 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 130$ $\quad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 33 & -2 \\ 3 & 19 & 0 \\ 1 & 10 & -3 \end{vmatrix} = 104$ $\quad |A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 33 \\ 3 & 1 & 19 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 26$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 5$ $\qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = 4$ $\qquad z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = 1$

047 Resuelve, aplicando la regla de Cramer, estos sistemas compatibles indeterminados.

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 6 \\ -3x + y - 2z &= -3 \\ 2x - 3y + z &= -3 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y + z + t &= 4 \\ x - y + z &= 1 \\ y - z + t &= 1 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2a - b &= 0 \\ 11a - b - 3c &= 0 \\ a - 2b + c &= 0 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 3p - 3q + 11r &= 0 \\ 4p + 7r &= 0 \\ 5p + 3q + 3r &= 0 \\ -6p - 6q + r &= 0 \end{aligned}\right\}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y &= 6 - z \\ -3x + y &= -3 + 2z \end{aligned}\right\}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 - z & 2 \\ -3 + 2z & 1 \end{vmatrix} = 12 - 5z$ $\qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 6 - z \\ -3 & -3 + 2z \end{vmatrix} = 15 - z$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{12 - 5z}{7}$ $\qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{15 - z}{7}$

La solución es: $x = \dfrac{12 - 5\lambda}{7}$, $y = \dfrac{15 - \lambda}{7}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=4-t \\ x-y+z=1 \\ y-z=1-t \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1-t & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4-2t \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 2-t$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4-t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & -1 \end{vmatrix} = 3-t \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{3-t}{2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4-t \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = 1+t \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1+t}{2}$$

La solución es: $x = 2-\lambda,\quad y = \dfrac{3-\lambda}{2},\quad z = \dfrac{1+\lambda}{2},\quad t = \lambda$ con $\lambda = \mathbb{R}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 11 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a-b=0 \\ 11a-b=3c \end{array}\right\}$$

$$|A_a| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3c & -1 \end{vmatrix} = 3c \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 3c \end{vmatrix} = 6c$$

$$a = \frac{|A_a|}{|A|} = \frac{c}{3} \qquad b = \frac{|A_b|}{|A|} = \frac{2c}{3}$$

La solución es: $a = \dfrac{\lambda}{3},\quad b = \dfrac{2\lambda}{3},\quad c = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ -6 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3p-3q=-11r \\ 4p=-7r \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} p = -\dfrac{7}{4}\lambda \\ q = \dfrac{23}{12}\lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ r = \lambda \end{array}\right.$$

048 **Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.**

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ x+y-3z=3 \\ 2x+3y+z=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=3 \\ 2y+3z=2 \\ 3x+y+3z=7 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} a+c=0 \\ b-c=1 \\ a+3b+c=5 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 16x+17y+7z=0 \\ 4x-y+4z=1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} a+c=0 \\ b-c=1 \\ a+3b-2c=5 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 2x-y+t=0 \\ x+2y-z+4t=-1 \\ 3x-4y+z-2t=1 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} 2x-4y+z=7 \\ -3x+6y-2z=4 \\ 11x-22y+6z=24 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} 2a-b+c=7 \\ 3a+2b-2c=1 \end{array}\right\}$

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=\text{Rango }(A^*)=3=\text{n.º de incógnitas}$

Sistema compatible determinado

$|A_x|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=12 \qquad |A_y|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-12 \qquad |A_z|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}=3$

$x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=-4 \qquad y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=4 \qquad z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=-1$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{Rango }(A^*)=2$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x+y=3-2z \\ 2y=2-3z \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3-2z & 1 \\ 2-3z & 2 \end{vmatrix} = 4-z \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3-2z \\ 0 & 2-3z \end{vmatrix} = 2-3z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{4-z}{2} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{2-3z}{2}$$

La solución es: $x = \dfrac{4-\lambda}{2}$, $y = \dfrac{2-3\lambda}{2}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A) = \text{Rango }(A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado

$$|A_a| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad |A_c| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$a = \frac{|A_a|}{|A|} = -\frac{2}{3} \qquad b = \frac{|A_b|}{|A|} = \frac{5}{3} \qquad c = \frac{|A_c|}{|A|} = \frac{2}{3}$$

d) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 16 & 17 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 17 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 16 & 17 & 7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 21 \rightarrow \text{Rango }(A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 17 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango }(A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & -13 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 0 \\ x - 2y \phantom{{}+z} = 0 \\ -21y \phantom{{}+z} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{21} \\ y = -\dfrac{1}{21} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3 \neq \text{Rango } (A) \rightarrow$ Sistema incompatible

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = \text{Rango } (A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas

Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x - y = -t \\ x + 2y = -1 + z - 4t \end{array}\right\}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} -t & -1 \\ -1 + z - 4t & 2 \end{vmatrix} = -1 + z - 6t$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{-1 + \lambda - 6\mu}{5}$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -t \\ 1 & -1 + z - 4t \end{vmatrix} = -2 + 2z - 7t$

$y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-2 + 2\lambda - 7\mu}{5}$

La solución es: $x = \dfrac{-1 + \lambda - 6\mu}{5}, \quad y = \dfrac{-2 + 2\lambda - 7\mu}{5},$

$z = \lambda, \quad t = \mu \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

g) $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 11 & -22 & 6 \end{pmatrix}$

$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 7 \\ -3 & 6 & -2 & 4 \\ 11 & -22 & 6 & 24 \end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 11 & -22 & 6 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & -2 & 4 \\ 11 & 6 & 24 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{Rango }(A^*)=2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x+z=7+4y \\ -3x-2z=4-6y \end{array}\right\}$

$|A_x|=\begin{vmatrix} 7+4y & 1 \\ 4-6y & -2 \end{vmatrix}=-18-2y$ $\qquad |A_z|=\begin{vmatrix} 2 & 7+4y \\ -3 & 4-6y \end{vmatrix}=29$

$x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=18+2\lambda$ $\qquad z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=-29$

La solución es: $x=18+2\lambda,\quad y=\lambda,\quad z=-29$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

h) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=\text{Rango }(A^*)=2<$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2a-b=7-c \\ 3a+2b=1+2c \end{array}\right\}$

$|A_a|=\begin{vmatrix} 7-c & -1 \\ 1+2c & 2 \end{vmatrix}=15$ $\qquad |A_b|=\begin{vmatrix} 2 & 7-c \\ 3 & 1+2c \end{vmatrix}=7c-19$

$a=\dfrac{|A_a|}{|A|}=\dfrac{15}{7}$ $\qquad b=\dfrac{|A_b|}{|A|}=\dfrac{7c-19}{7}$

La solución es: $a=\dfrac{15}{7},\quad b=\dfrac{7\lambda-19}{7},\quad c=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

049 **Discute el sistema de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro m.**

$$\left.\begin{aligned}(m-2)x + y &= 0\\ x + (m-2)y &= 0\end{aligned}\right\}$$

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de m.

$$A = \begin{pmatrix} m-2 & 1\\ 1 & m-2\end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m-2 & 1\\ 1 & m-2\end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 1\\ m = 3\end{cases}$$

- Si $m \in \mathbb{R} - \{1, 3\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = 1$ o $m = 3 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

050 **Discute, en función de a, el sistema.**

$$\left.\begin{aligned}ax + ay &= a\\ x - ay &= 1\end{aligned}\right\}$$

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba B. Cuestión 3)

$$A = \begin{pmatrix} a & a\\ 1 & -a\end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} a & a & a\\ 1 & -a & 1\end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a\\ 1 & -a\end{vmatrix} = -a^2 - a$$

$$-a^2 - a = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0\\ a = -1\end{cases}$$

Al ser la última columna de la matriz A^* igual que la primera:

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -1$ o $a = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

051 **El siguiente sistema de ecuaciones depende de un parámetro p. Discútelo según los valores de p.**

$$\left.\begin{aligned}x + 2y + z &= p\\ 2x + 3y + z &= p\\ x + y - pz &= p\end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -p \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & p \\ 2 & 3 & 1 & p \\ 1 & 1 & -p & p \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -p \end{vmatrix} = p \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & p \\ 2 & 3 & p \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = -p$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $p \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

052 **Discute el sistema según los valores de *a*.**

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 2 \\ 5x + 2y + 4z = -1 \\ 3x + y + a^2z = 3a \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & a^2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & a^2 & 3a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = 1 - a^2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3a \end{vmatrix} = -3a - 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = -1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

053 **Discute este sistema para los distintos valores de *k*.**

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \\ 4x - 3y = k \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & k \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & k \end{vmatrix} = 5k - 65$$

- Si $k \neq 13 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $k = 13 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

054 **Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro *p*.**

$$\left.\begin{aligned} px + (p+1)z = p \\ py + z = p \\ y + pz = p \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & p+1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & p \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} p & 0 & p+1 & p \\ 0 & p & 1 & p \\ 0 & 1 & p & p \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} p & 0 & p+1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & p \end{vmatrix} = p(p^2 - 1) \qquad \begin{vmatrix} p & 0 & p \\ 0 & p & p \\ 0 & 1 & p \end{vmatrix} = p(p^2 - p) = p^2(p-1)$$

- Si $p \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = -1$, como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $p = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado
- Si $p = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

055 **¿Qué valores debe tomar *a* en el siguiente sistema de ecuaciones lineales para que sea incompatible?**

$$\left.\begin{aligned} x + (a-1)y + z = 1 \\ 3x + ay + az = 3 \end{aligned}\right\}$$

¿Y para que sea compatible?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 3 & a & a \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 1 & 1 \\ 3 & a & a & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 3 - 2a \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 3$$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < n.º de incógnitas para cualquier valor de a
Sistema compatible indeterminado para cualquier valor de a

056 **Clasifica el siguiente sistema para los distintos valores del parámetro *p*.**

$$\left.\begin{array}{r} a + pb - 2c = 0 \\ pb + c = 0 \\ 3a + 2b - c = 0 \end{array}\right\}$$

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de p.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & -2 \\ 0 & p & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & p & -2 \\ 0 & p & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8p - 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

- Si $p \neq \frac{1}{4} \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = \frac{1}{4} \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

057 **Halla para qué valores del parámetro *a* este sistema es incompatible.**

$$\left.\begin{array}{r} (a+1)x + y + z = a(a+3) \\ x + (a+1)y + z = a^2(a+3) \\ x + y + (a+1)z = a^3(a+3) \end{array}\right\}$$

¿Qué valor debe tomar *a* para que sea compatible indeterminado?

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & a(a+3) \\ 1 & a+1 & 1 & a^2(a+3) \\ 1 & 1 & a+1 & a^3(a+3) \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3 + 2 - 3(a+1) = a^3 + 3a^2 = a^2(a+3)$$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & a(a+3) \\ 1 & a+1 & a^2(a+3) \\ 1 & 1 & a^3(a+3) \end{vmatrix} = a(a+3)\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a(a+3)(a^2(a+1)^2 - a^2 - a(a+1)) =$$

$$= a^2(a+3)(a^3 + 2a^2 - a - 1)$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 0\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado
- Si $a = -3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

Luego no hay ningún valor de a para el que el sistema sea incompatible.
Los valores para los que es compatible indeterminado son 0 y -3.

058 **Averigüe si el siguiente sistema puede ser compatible indeterminado para algún valor de *m*.**

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x + 4y + 3z &= 0 \\ x + y + mz &= 0 \end{aligned}\right\}$$

¿Es incompatible para algún valor de *m*?

(Cataluña. Junio 2006. Cuestión 2)

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 2 - 2m$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

El sistema no es incompatible para ningún valor de m.

059 **Discute el sistema de ecuaciones lineales según los valores de *b*.**

$$\left.\begin{aligned} x+2y-z&=2\\ x+(1+b)y-bz&=2b\\ x+by+(1+b)z&=1\end{aligned}\right\}$$

(Extremadura. Junio 2006. Repertorio B. Ejercicio 4)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1+b & -b\\ 1 & b & 1+b\end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 1+b & -b & 2b\\ 1 & b & 1+b & 1\end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1+b & -b\\ 1 & b & 1+b\end{vmatrix}=2b^2-2b=2b(b-1)$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 1+b & 2b\\ 1 & b & b\end{vmatrix}=-b^2+3b-2=-(b-1)(b-2)$$

- Si $b\in\mathbb{R}-\{0,1\}\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $b=0\rightarrow\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3$
  Sistema incompatible
- Si $b=1\rightarrow\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=2<$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

060 **Discutir la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*.**

$$\left.\begin{aligned} x-y+z&=a\\ x+y-z&=1\\ 3x+3y+az&=a\end{aligned}\right\}$$

(País Vasco. Julio 2006. Bloque A. Problema A)

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 3 & a\end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & a\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 3 & a & a\end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 3 & a\end{vmatrix}=2a+6 \qquad \begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & a\end{vmatrix}=2a-6$$

- Si $a\neq -3\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a=-3\rightarrow\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3$
  Sistema incompatible

061 Estudie, según los valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} ax + ay = a \\ x - y + az = a \\ x + 2y + 3z = a \end{array}\right\}$$

(Murcia. Junio 2006. Bloque 1. Cuestión A)

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a & a & 0 & a \\ 1 & -1 & a & a \\ 1 & 2 & 3 & a \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -a(a+6) \qquad \begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = -3a(a-1)$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-6, 0\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -6 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

062 a) El siguiente sistema es compatible y determinado.

$$\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

Calcula su solución.

b) Considera ahora el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 1 \\ 4y + az = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + ay + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

- ¿Es posible encontrar valores para a tales que el sistema sea incompatible? En caso afirmativo, indica cuáles. Justifica tu respuesta.
- ¿Es posible encontrar valores para a tales que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

(Cantabria. Junio 2004. Bloque 1. Opción B)

a) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = -\frac{3}{5} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{4}{5} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -\frac{2}{5}$$

Comprobamos con la última ecuación: $-\frac{3}{5}+3\cdot\frac{4}{5}+2\left(-\frac{2}{5}\right)=1$

Por tanto, la solución es: $x=-\frac{3}{5},\quad y=\frac{4}{5},\quad z=-\frac{2}{5}$

b) $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&4&a\\1&2&0\\1&a&2\end{pmatrix}\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&1\\0&4&a&2\\1&2&0&1\\1&a&2&1\end{array}\right)$

$\begin{vmatrix}-1&1&1\\0&4&a\\1&2&0\end{vmatrix}=3a-4\qquad \begin{vmatrix}-1&1&1\\1&2&0\\1&a&2\end{vmatrix}=a-8$

Rango $(A)=3$ para cualquier valor de a

$$\begin{vmatrix}-1&1&1&1\\0&4&a&2\\1&2&0&1\\1&a&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&1&1\\0&4&a&2\\0&3&1&2\\0&1+a&3&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4&a&2\\3&1&2\\1+a&3&2\end{vmatrix}=6a-2a^2$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{0,3\}\rightarrow$ Rango $(A^*)=4\neq$ Rango $(A)=3\rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a=0$ o $a=3\rightarrow$ Rango $(A^*)=$ Rango $(A)=3$
  Sistema compatible determinado

Por tanto no hay valores para los que el sistema sea compatible indeterminado.

063 **Clasificar el siguiente sistema según los distintos valores de los parámetros *a* y *b*.**

$$\left.\begin{aligned}x-y-z&=b\\-x+y&=2\\x+ay+2z&=-2\end{aligned}\right\}$$

(Murcia. Junio 2008. Bloque 1. Cuestión B)

$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\1&a&2\end{pmatrix}\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&b\\-1&1&0&2\\1&a&2&-2\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\1&a&2\end{vmatrix}=a+1\qquad \begin{vmatrix}1&-1&b\\-1&0&2\\1&2&-2\end{vmatrix}=-2b-4$

- Si $a\neq-1$ y para cualquier valor de b:
  Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a=-1$ y $b\neq-2\rightarrow\begin{vmatrix}1&-1\\-1&0\end{vmatrix}=-1\neq0\rightarrow$ Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3$
  Sistema incompatible
- Si $a=-1$ y $b=-2\rightarrow\begin{vmatrix}1&-1\\-1&0\end{vmatrix}=-1\neq0\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=2$
  Sistema compatible indeterminado

064 Discute este sistema y resuélvelo cuando $m = 6$.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ x - 2y + mz = m \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & m & m \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = m - 7 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = m$$

- Si $m \neq 7 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = 7 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $m = 6 \rightarrow |A| = -1$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -18 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 12 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 18 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -12 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -6$$

065 Se considera el sistema $\left.\begin{array}{r} x + y + az = 4 \\ ax + y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{array}\right\}$, donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor de a.

b) Resolver el sistema para $a = 1$.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba A. Problema 1)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2a^2 - a - 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6a - 6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$2a^2 - a - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}, 1\right\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado

- Si $a = -\dfrac{1}{2} \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} y - z = -x \\ 2y - z = 2 - 2x \end{array}\right\}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 2-2x & -1 \end{vmatrix} = 2 - x \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -x \\ 2 & 2-2x \end{vmatrix} = 2$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = 2 - x \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 2$$

La solución es: $x = \lambda, \quad y = 2 - \lambda, \quad z = 2$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

066 **Se considera el sistema de ecuaciones:**

$$\left.\begin{array}{r} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 0 \end{array}\right\}$$

a) Discútelo para los distintos valores de m.

b) Resuélvelo para $m = 1$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2004. Bloque 2. Pregunta B)

a) $A = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - m \qquad \begin{vmatrix} m-1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ m & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3m + 1$$

- Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $m = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $m = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible

b) Si $m = 1 \rightarrow |A| = -2$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -1 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0$$

067 Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+\alpha y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ \alpha x+y+z=9 \end{array}\right\}$, se pide:

a) Prueba que siempre es compatible, obteniendo los valores de α para los que es indeterminado.

b) Resuelve el ejercicio anterior para $\alpha = 7$.

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 1. Problema 2)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$

Las dos últimas columnas de la matriz ampliada son proporcionales entonces Rango (A) = Rango (A^*) para cualquier α.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 8\alpha + 7 \qquad \alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 7 \end{cases}$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, 7\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $\alpha = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado
- Si $\alpha = 7 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado

b) Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x+7y=9-z \\ 3x+5y=9-z \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 9-z & 7 \\ 9-z & 5 \end{vmatrix} = 2z - 18 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 9-z \\ 3 & 9-z \end{vmatrix} = 2z - 18$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{2z-18}{-16} = \frac{9-z}{8} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{2z-18}{-16} = \frac{9-z}{8}$$

La solución es: $x = y = \dfrac{9-\lambda}{8}$, $\quad z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

068 Sea S el sistema de ecuaciones lineales:

$$S = \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + 4y + 9z = 14 \\ x + 8y + Az = \dfrac{10}{7}A \end{cases}$$

Estudiar la compatibilidad del sistema en función de A. Resolver para $A = 0$.

(País Vasco. Julio 2007. Bloque A. Problema A)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & A \end{pmatrix} \qquad B^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \\ 1 & 8 & A & \frac{10}{7}A \end{array}\right)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & A \end{vmatrix} = 2A - 42 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 14 \\ 1 & 8 & \frac{10}{7}A \end{vmatrix} = \frac{10}{7}(2A - 42)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

- Si $A \neq 21 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado
- Si $A = 21 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $A = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ x + 4y + 9z = 14 \\ x + 8y \qquad = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 2y \qquad = 4 \\ x + 8y \qquad = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 2y \qquad = 4 \\ -7x \qquad = -16 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{16}{7} \\ y = -\dfrac{2}{7} \\ z = \dfrac{10}{7} \end{cases}$$

069 **Considere el sistema de ecuaciones:**

$$\left.\begin{array}{r} px + 7y + 8z = 1.370 \\ x + y + z = 200 \\ 7x + py + 8z = 1.395 \end{array}\right\}$$

a) Discútalo en función del parámetro p.

b) Resuelva el sistema para $p = 6$.

(Cataluña. Septiembre 2006. Problema 6)

a) $$A = \begin{pmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} p & 7 & 8 & 1.370 \\ 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & p & 8 & 1.395 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{vmatrix} = -p^2 + 16p - 63 \qquad \begin{vmatrix} p & 8 & 1.370 \\ 1 & 1 & 200 \\ 7 & 8 & 1.395 \end{vmatrix} = -205p + 1.410$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$-p^2 + 16p - 63 = 0 \rightarrow \begin{cases} p = 7 \\ p = 9 \end{cases}$$

- Si $p \in \mathbb{R} - \{7, 9\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $p = 7$ o $p = 9 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

b) Para $p = 6 \rightarrow |A| = -3$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1.370 & 7 & 8 \\ 200 & 1 & 1 \\ 1.395 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -255 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 85$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 1.370 & 8 \\ 1 & 200 & 1 \\ 7 & 1.395 & 8 \end{vmatrix} = -180 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 60$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 1.370 \\ 1 & 1 & 200 \\ 7 & 6 & 1.395 \end{vmatrix} = -165 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 55$$

070 **Discute, según los valores del parámetro m, el sistema:**

$$\left.\begin{aligned} y + mz &= 0 \\ x + z &= 0 \\ mx - y &= m \end{aligned}\right\}$$

Resuélvelo, si es posible, para $m = 0$ y $m = 2$.

(Galicia. Junio 2006. Bloque 1. Opción 2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & m & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & -1 & 0 & m \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ m & -1 & m \end{vmatrix} = -m$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $m \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $m = 0 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Resolvemos para $m = 0$: $\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ x + z &= 0 \\ -y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= -\lambda \\ y &= 0 \\ z &= \lambda \end{aligned}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Para $m = 2$ el sistema es incompatible.

071 **Discute el siguiente sistema según el valor del parámetro k y resuélvelo cuando $k = -1$.**

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= k \\ (1 + k)x + y + z &= 2k \\ x + (1 + k)y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(Baleares. Junio 2007. Opción A. Cuestión 1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 + k & 1 & 1 \\ 1 & 1 + k & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 + k & 1 & 1 & 2k \\ 1 & 1 + k & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+k & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \end{vmatrix} = k^2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1+k & 1 & 2k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - k$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+k & 1 \end{vmatrix} = -k$$

- Si $k \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado
- Si $k = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 1 \neq$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible

Para $k = -1 \rightarrow |A| = 1$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -2 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0$$

072 **Clasifica en función del parámetro el sistema de ecuaciones:**

$$\left.\begin{aligned} ax - 3y - 2z &= 0 \\ -x + (5+a)z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

y resuélvelo, si es posible, para $a = -4$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2006. Bloque 3. Pregunta B)

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de a.

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 5+a \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 5+a \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -3a^2 - 21a - 36$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$-3a^2 - 21a - 36 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = -4 \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-4, -3\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -4$ o $a = -3 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado

Para $a = -4$ consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} -x &= -z \\ 2x + 3y &= -4z \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

073 Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales y resuélvelo en el caso de que sea compatible indeterminado.

$$\left.\begin{aligned} ax - y - 4z &= 1 \\ x + ay - 2z &= -1 \\ y + z &= -a \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -4 \\ 1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -4 & 1 \\ 1 & a & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -4 \\ 1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3 \qquad \begin{vmatrix} a & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = 2a^2 - 3a + 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = 1 \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -3 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $a = 1$ consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} -y - 4z &= 1 - x \\ y + z &= -1 \end{aligned}\right\}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1-x & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -x - 3 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1-x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = x$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-x-3}{3} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{x}{3}$$

La solución es: $x = \lambda$, $y = \dfrac{-\lambda - 3}{3}$, $z = \dfrac{\lambda}{3}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

074 Estudiar y resolver, cuando sea posible, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ x + y &= a \end{aligned}\right\}$$

(Murcia. Septiembre 2007. BLoque 1. Cuestión A)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - b \qquad \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2$$

- Si $a \neq b \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = b = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1$
  Sistema compatible indeterminado
- Si $a = b \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 1 \neq$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible

Para $a \neq b \rightarrow \left.\begin{array}{r} ax + by = 0 \\ -ax - ay = -a^2 \end{array}\right\} \rightarrow (b-a)y = -a^2 \rightarrow y = -\dfrac{a^2}{b-a} \rightarrow x = \dfrac{ab}{b-a}$

Para $a = b = 0 \rightarrow x + y = 0 \rightarrow y = -x$

La solución es: $x = \lambda, \quad y = -\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

075 **Discute el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo en los casos en que sea posible.**

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = a^2 \\ x - y = -a \\ x + ay + z = a \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 0 & -a \\ 1 & a & 1 & a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ -1 & 0 & -a \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + 2a = -2a(a-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 0$ o $a = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado

Para $a = 0$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} y + z = 0 \\ -y = -x \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Para $a = 1$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} y + z = 1 - x \\ -y = -1 - x \end{array}\right\}$

La solución es: $x = \lambda, \quad y = 1 + \lambda, \quad z = -2\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

076 **Discute el sistema y resuélvelo para los valores del parámetro que lo hagan compatible determinado.**

$$\left.\begin{array}{l} mx + 2y + 3z = 0 \\ 2x + my + 2z = 2 \\ 2x + my + 3z = m - 2 \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} m & 2 & 3\\ 2 & m & 2\\ 2 & m & 3\end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 3 & 0\\ 2 & m & 2 & 2\\ 2 & m & 3 & m-2\end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 2 & 3\\ 2 & m & 2\\ 2 & m & 3\end{vmatrix}=m^2-4 \qquad \begin{vmatrix} m & 3 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 3 & m-2\end{vmatrix}=2m^2-16m+24$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=2\neq 0$$

- Si $m=\pm 2 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m=-2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $m=2 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $m=\pm 2 \rightarrow |A|=m^2-4$

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3\\ 2 & m & 2\\ m-2 & m & 3\end{vmatrix}=-3m^2+16m-20$$

$$\rightarrow x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-3m^2+16m-20}{m^2-4}=\frac{-3m+10}{m+2}$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} m & 0 & 3\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & m-2 & 3\end{vmatrix}=-2m^2+16m-24$$

$$\rightarrow y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{-2m^2+16m-24}{m^2-4}=\frac{-2m+12}{m+2}$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix} m & 2 & 0\\ 2 & m & 2\\ 2 & m & m-2\end{vmatrix}=m^3-4m^2-4m+16$$

$$\rightarrow z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{m^3-4m^2-4m+16}{m^2-4}=m-4$$

Para $m=2$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{l} 2x+2z=2-2y\\ 2x+3z=-2y\end{array}\right\}$

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 2-2y & 2\\ -2y & 3\end{vmatrix}=6-2y \qquad |A_z|=\begin{vmatrix} 2 & 2-2y\\ 2 & -2y\end{vmatrix}=-4$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=3-y \qquad z=\frac{|A_z|}{|A|}=-2$$

La solución es: $x=3-\lambda,\quad y=\lambda,\quad z=-2$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

077 **Resuelve para los valores del parámetro que lo hacen compatible determinado.**

$$\left.\begin{array}{r} ax-z=a\\ ay+2z=0\\ 3x+y+z=5\end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + a$$

Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado

$$|A_x| = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{a^2 + 3a}{a^2 + a} = \frac{a+3}{a+1}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & a & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4a \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-4a}{a^2 + a} = \frac{-4}{a+1}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2a^2 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{2a^2}{a^2 + a} = \frac{2a}{a+1}$$

078 **Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro α y resolverlo en los casos que sea posible.**

$$\left.\begin{aligned} 6x + 2y + 2z &= 6 \\ \alpha x + 2y + z &= \alpha \\ 5x + 3y + \alpha z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

(Canarias. Junio 2008. Bloque 3. Opción A)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 5 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & 6 \\ \alpha & 2 & 1 & \alpha \\ 5 & 3 & \alpha & 5 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 5 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = -2\alpha^2 + 18\alpha - 28$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$-2\alpha^2 + 18\alpha - 28 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 7 \end{cases}$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{2, 7\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $\alpha = 2$ o $\alpha = 7 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado

Para $\alpha \in \mathbb{R} - \{2, 7\}$:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 5 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = -2\alpha^2 + 18\alpha - 28 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 2 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 5 & 5 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 0$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 6 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0$$

Para $\alpha = 2$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2y + 2z = 6 - 6x \\ 2y + z = 2 - 2x \end{array}\right\}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6-6x & 2 \\ 2-2x & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2x \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 6-6x \\ 2 & 2-2x \end{vmatrix} = 8x - 8$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{2-2x}{-2} = x - 1 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{8x-8}{-2} = 4 - 4x$$

La solución es: $x = \lambda$, $y = \lambda - 1$, $z = 4 - 4\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Para $\alpha = 7$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2y + 2z = 6 - 6x \\ 2y + z = 7 - 7x \end{array}\right\}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6-6x & 2 \\ 7-7x & 1 \end{vmatrix} = 8x - 8 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 6-6x \\ 2 & 7-7x \end{vmatrix} = 2 - 2x$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{8x-8}{-2} = 4 - 4x \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{2-2x}{-2} = x - 1$$

La solución es: $x = \lambda$, $y = 4 - 4\lambda$, $z = \lambda - 1$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

079 Considerar el sistema lineal de ecuaciones en x, y y z.

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \end{array}\right\}$$

a) Determinar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene solución única. Calcular dicha solución para $m = 1$.

b) Determinar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene infinitas soluciones. Calcular dichas soluciones.

c) Estudiar si existe algún valor de m para el cual el sistema no tiene solución.

(Aragón. Junio 2007. Opción A. Cuestión 1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = m^2 + m \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & -1 & m \end{vmatrix} = -4m$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

a) Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.° de incógnitas
Sistema compatible determinado

Para $m = 1 \rightarrow |A| = 2$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = -2 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = 2 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 1$$

b) Si $m = 0 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $m = 0$ consideramos: $\left.\begin{array}{r} 3y + z = 5 - x \\ 2z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) Si $m = -1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

080 **Discútase, en función del parámetro real k, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:**

$$\left.\begin{array}{r} kx + 3y = 0 \\ 3x + 2y = k \\ 3x + ky = 0 \end{array}\right\}$$

Resuélvase el sistema cuando sea posible.

(Castilla y León. Septiembre 2006. Prueba B. Problema 1)

$$A = \begin{pmatrix} k & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} k & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2k - 9 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & k \end{vmatrix} = 3k - 6 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2 \text{ para cualquier valor de } k$$

$$\begin{vmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{vmatrix} = -k(k^2 - 9)$$

- Si $k \in \mathbb{R} - \{-3, 0, 3\} \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $k = -3$, $k = 0$ o $k = 3 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 =$ n.° de incógnitas
  Sistema compatible determinado

Para $k = -3$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = -3 \\ 3x - 3y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{5} \\ y = -\dfrac{3}{5} \end{array}\right.$

Para $k = 0$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 0 \\ 3x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$

Para $k = 3$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 3 \\ 3x + 3y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -3 \end{array}\right.$

081 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} x+(k+1)y+2z=-1 \\ kx+y+z=k \\ (k-1)x-2y-z=k+1 \end{array}\right\}$$

a) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

(Madrid. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 3)

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k-1 & -2 & -1 & k+1 \end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=2k^2-5k+2$ $\qquad \begin{vmatrix} k+1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ -2 & -1 & k+1 \end{vmatrix}=2k^2-3k-2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0$

$2k^2-5k+2=0 \rightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \alpha=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

- Si $k\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}, 2\right\} \rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $k=\dfrac{1}{2} \rightarrow$ Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $k=2 \rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) Para $k=2$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} y+z=2-2x \\ -2y-z=3-x \end{array}\right\}$

$|A_y|=\begin{vmatrix} 2-2x & 1 \\ 3-x & -1 \end{vmatrix}=3x-5$ $\qquad |A_z|=\begin{vmatrix} 1 & 2-2x \\ -2 & 3-x \end{vmatrix}=7-5x$

$y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=3x-5$ $\qquad z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=7-5x$

La solución es: $x=\lambda,\quad y=3\lambda-5,\quad z=7-5\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

082 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ x+(a^2-a-1)y=-1 \\ x+(a^2-a-1)y+(a-2)z=1-a^2 \end{array}\right\}$$

(Navarra. Junio 2008. Grupo 1. Opción A)

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & a^2-a-1 & 0\\ 1 & a^2-a-1 & a-2\end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & a^2-a-1 & 0 & -1\\ 1 & a^2-a-1 & a-2 & 1-a^2\end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & a^2-a-1 & 0\\ 1 & a^2-a-1 & a-2\end{vmatrix}=a(a-2)(a-1) \qquad \begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & a-2 & 1-a^2\end{vmatrix}=-a(a-1)$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{1,0,2\}\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a=2\rightarrow$ Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3\rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a=0$ o $a=1\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=2$
  Sistema compatible indeterminado

Para $a\in\mathbb{R}-\{1,0,2\}$:

$$|A_x|=\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & a^2-a-1 & 0\\ 1-a^2 & a^2-a-1 & a-2\end{vmatrix}=a(a-1)(3-a^2)\rightarrow x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{(3-a^2)}{(a-2)}$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1-a^2 & a-2\end{vmatrix}=a(a-1)\rightarrow y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{a(a-1)}{a(a-2)(a-1)}=\frac{1}{(a-2)}$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & a^2-a-1 & -1\\ 1 & a^2-a-1 & 1-a^2\end{vmatrix}=a(a-1)(2-a^2)$$

$$\rightarrow z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{a(a-1)(2-a^2)}{a(a-2)(a-1)}=\frac{(2-a^2)}{(a-2)}$$

Para $a=0$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r}x-z=y\\ x=y-1\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\lambda-1\\ y=\lambda\\ z=-1\end{array}\right.$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

Para $a=1$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r}x-z=y\\ x=y-1\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\lambda-1\\ y=\lambda\\ z=-1\end{array}\right.$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

083 **Dado el sistema** $\left.\begin{array}{r}x+3y-az=4\\ -ax+y+az=0\\ -x+2ay=a+2\\ 2x-y-2z=0\end{array}\right\}$ **discutirlo según los valores de** a**,**
y resolverlo cuando sea compatible.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 1. Opción B)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -a\\ -a & 1 & a\\ -1 & 2a & 0\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -a & 4\\ -a & 1 & a & 0\\ -1 & 2a & 0 & a+2\\ 2 & -1 & -2 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a \\ -a & 1 & a \\ -1 & 2a & 0 \end{vmatrix} = 2a(a-2)(a+1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -a \\ -a & 1 & a \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -(a-2)(a-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ -a & 1 & a & 0 \\ -1 & 2a & 0 & a+2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (a-2)^2(a+3) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & a+2 \end{vmatrix} = (a-2)(-5a-3)$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 2\} \rightarrow$ Rango $(A) = 3 \neq$ Rango $(A^*) = 4 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = -3 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 2 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $a = -3$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x + 3y + 3z = 4 \\ 3x + y - 3z = 0 \\ -x - 6y = -1 \end{array}\right\}$

$|A| = -60$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -60 \qquad x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = 0$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -60 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 1$$

Para $a = 2$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{l} x + 3y = 4 + 2z \\ 2x - y = 2z \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4+2z & 3 \\ 2z & -1 \end{vmatrix} = -4 - 8z \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4+2z \\ 2 & 2z \end{vmatrix} = -8 - 2z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{4+8z}{7} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{8+2z}{7}$$

La solución es: $x = \dfrac{4+8\lambda}{7}, \quad y = \dfrac{8+2\lambda}{7}, \quad z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

084 **Discutir, según los valores que adopte el parámetro t (un número real), la compatibilidad o incompatibilidad del sistema:**

$$\left.\begin{array}{r} tx + 3y = 2 \\ 3x + 2y = t \\ 2x + ty = 3 \end{array}\right\}$$

Resuélvelo cuando sea posible.

(La Rioja. Junio 2006. Propuesta B. Ejercicio 5)

$$A = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & t \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} t & 3 & 2 \\ 3 & 2 & t \\ 2 & t & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} t & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2t - 9 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & t \end{vmatrix} = 3t - 4 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2 \text{ para cualquier valor de } t$$

$$\begin{vmatrix} t & 3 & 2 \\ 3 & 2 & t \\ 2 & t & 3 \end{vmatrix} = -(t+5)(t^2 - 5t + 7)$$

- Si $t \neq -5 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $t = -5 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

Para $t = -5$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} -5x + 3y = 2 \\ 3x + 2y = -5 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \end{array}\right.$

085 **Considera el sistema de ecuaciones lineales, donde $m \in \mathbb{R}$.**

$$\left.\begin{array}{r} x + y + mz = 1 \\ mx + (m-1)y + z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{array}\right\}$$

a) Determina el carácter del sistema según los valores de m.

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible determinado.

c) Modifica solamente un coeficiente de la última ecuación para que el sistema resultante sea compatible para cualquier valor de m.

(Cantabria. Septiembre 2007. Bloque 2. Opción A)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ m & m-1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m+1 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m-1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -m$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m-1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

b) Si $m \neq 1$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^3 + m^2 + 2m - 1$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-m^3 + m^2 + 2m - 1}{m - 1}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 1 & m+1 & 1 \end{vmatrix} = m^3 - m \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{m^3 - m}{m-1} = m(m+1)$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m-1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -m \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-m}{m-1}$$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + mz = 1 \\ mx + (m-1)y + z = m \\ x + y + (m+1)z = m+1 \end{array}\right\} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado para cualquier valor de m

086 **Dado el sistema de ecuaciones lineales:**

$$\left.\begin{array}{l} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{array}\right\}$$

Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y = 2$.

(Madrid. Junio 2008. Opción A. Ejercicio 1)

$$\text{Si } y = 2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2a = 2 \\ ax - 2 \ \ = a + 1 \end{array}\right\} \rightarrow x = 2 + 2a \rightarrow a(2 + 2a) - 2 = a + 1$$

$$\rightarrow 2a^2 + a - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

087 **Considera este sistema de ecuaciones:**

$$\left.\begin{array}{l} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{array}\right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores de m.

b) Calcula los valores de m para los que el sistema tiene una solución en la que $x = 3$.

(Andalucía. Junio 2004. Opción A. Ejercicio 3)

a) $A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m-1 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 1$ $\qquad \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 2m-1 \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1$

- Si $m \neq \pm 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = -1 \rightarrow$ Rango $(A) = 1 \neq$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $m = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

b) Si $x = 3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3m - y = 1 \\ 3 - my = 2m - 1 \end{array}\right\} \rightarrow y = 3m - 1 \rightarrow 3 - m(3m - 1) = 2m - 1$

$$\rightarrow -3m^2 - m + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

088 a) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{array}\right\}$$

b) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

(Madrid. Septiembre 2006. Opción B. Ejercicio 1)

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 3z \\ 2x + 3y = 5 + z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 3z \\ y = 5 - 5z \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -5 + 8\lambda \\ y = 5 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

b) Si $x + y + z = 4 \rightarrow -5 + 8\lambda + 5 - 5\lambda + \lambda = 4 \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

089 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3 \\ x + 3y + 2z = \alpha \end{array}\right\}$$

a) Justificar que, para cualquier valor del parámetro real α, el sistema tiene solución única.

b) Hallar la solución del sistema en función del parámetro α.

c) Determinar el valor de α para el que la solución (x, y, z) del sistema satisface $x+y+z=1$.

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Bloque 1. Problema 1)

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -50 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas

Sistema compatible determinado para cualquier valor de α

b) $|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10\alpha - 50 \rightarrow x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{10\alpha - 50}{-50} = \dfrac{5-\alpha}{5}$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = -30\alpha + 30 \rightarrow y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-30\alpha + 30}{-50} = \dfrac{3\alpha - 3}{5}$

$|A_z| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = 15\alpha - 20 \rightarrow z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{15\alpha - 20}{-50} = \dfrac{4 - 3\alpha}{10}$

c) Si $x + y + z = 1 \rightarrow \dfrac{5-\alpha}{5} + \dfrac{3\alpha - 3}{5} + \dfrac{4 - 3\alpha}{10} = 1 \rightarrow \alpha = 2 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \\ z = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$

090 **Demuestra que para que el sistema siguiente sea compatible tiene que suceder que: $c = a + b$.**

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= a \\ 2x + z &= b \\ 4x - y + 2z &= c \end{aligned}\right\}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & b \\ 4 & -1 & 2 & c \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 2 & 0 & b \\ 4 & -1 & c \end{vmatrix} = -2a - 2b + 2c$

El rango de la matriz A es 2. Para que el sistema sea compatible el rango de la matriz A^* también tiene que ser igual a 2. Para ello:

$$-2a - 2b + 2c = 0 \rightarrow c = a + b$$

091 **Los sistemas:** $\left.\begin{aligned} ax + y + bz &= -4 \\ bx + ay + cz &= -9 \\ cx + by + az &= -11 \end{aligned}\right\}$ **y** $\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ x + z &= -1 \\ x - z &= 3 \end{aligned}\right\}$ **son equivalentes.**

Hallar a, b y c.

(Murcia. Septiembre 2005. Bloque 1. Cuestión 1)

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ x + z &= -1 \\ x - z &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ x + z &= -1 \\ 2x &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}$$

Si los sistemas son equivalentes entonces tienen la misma solución. Así:

$$\left.\begin{array}{r} a-3-2b=-4 \\ b-3a-2c=-9 \\ c-3b-2a=-11 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} a-2b=-1 \\ -3a+b-2c=-9 \\ -2a-3b+c=-11 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & -9 \\ -2 & -3 & 1 & -11 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -3 & 1 & -11 \\ -3 & 1 & -2 & -9 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -3 & 1 & -11 \\ -7 & -5 & 0 & -31 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -3 & 1 & -11 \\ -7 & -5 & 0 & -31 \\ 0 & -19 & 0 & -38 \end{array}\right)$$

$$\to \left.\begin{array}{r} -2a-3b+c=-11 \\ -7a-5b=-31 \\ -19b=-38 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{array}\right.$$

092 **Se considera el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Discutirlo según los valores del parámetro real λ.

b) Resolverlo para $\lambda = -3$.

c) Resolverlo para $\lambda = 1$.

(Madrid. Junio 2001. Opción B. Ejercicio 3)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = -(\lambda-1)^2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+\lambda & 3+\lambda & 3+\lambda & 3+\lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3+\lambda)\begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(3+\lambda)(1-\lambda)(\lambda-1)^2 = (3+\lambda)(\lambda-1)^3$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{-3, 1\} \to$ Rango $(A^*) = 4 \neq$ Rango $(A) = 3 \to$ Sistema incompatible

- Si $\lambda = -3 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $\lambda = 1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 1 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) Para $\lambda = -3$ consideramos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = -3 \\ x + y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = -3 \\ 4z = -4 \\ 4y = -4 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

c) Para $\lambda = 1$ el sistema se reduce a:

$$x + y + z = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 - a - b \\ y = a \\ z = b \end{cases} \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

093 **Dado el sistema de ecuaciones:**

$$S = \begin{cases} x + 2y + z = A \\ x + y + z = B \\ x + y - z = C \end{cases}$$

Demostrar que es compatible determinado para cualquier valor de *A*, *B* y *C* y encontrar la solución en función de dichos valores.

(País Vasco. Septiembre 2003. Bloque A. Problema A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & A \\ 1 & 1 & 1 & B \\ 1 & 1 & -1 & C \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = \text{Rango } (A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado para cualquier valor de A, B y C

$$|A_x| = \begin{vmatrix} A & 2 & 1 \\ B & 1 & 1 \\ C & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2A + 3B + C \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-2A + 3B + C}{2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & A & 1 \\ 1 & B & 1 \\ 1 & C & -1 \end{vmatrix} = 2A - 2B \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = A - B$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & A \\ 1 & 1 & B \\ 1 & 1 & C \end{vmatrix} = B - C \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{B - C}{2}$$

094 En un supermercado se venden huevos de categorías *XL*, *L* y *M*. Averigua el precio de una docena de cada tipo de huevos sabiendo que:

- Carmen compró una docena de cada categoría y pagó 4,90 €.
- Jesús pagó 9,60 € por 2 docenas *XL* y 4 docenas *M.*
- Esther se llevó 3 docenas *L* y 3 *M* y pagó 9,30 €.

Sean x, y, z los precios de cada docena de huevos de categorías *XL*, *L* y *M*, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=4{,}9 \\ 2x+4z=9{,}6 \\ 3y+3z=9{,}3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=4{,}9 \\ -2y+2z=-0{,}2 \\ y+z=3{,}1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=4{,}9 \\ -2y+2z=-0{,}2 \\ 4z=6 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=1{,}8 \\ y=1{,}6 \\ z=1{,}5 \end{array}\right.$$

Así, la docena de huevos *XL* cuesta 1,80 €, la de categoría *L* vale 1,60 € y la de *M* 1,50 €.

095 El bloque de pisos en el que vivo ha estado de obras. El administrador de la comunidad está tratando de descubrir cuánto cobran a la hora un electricista, un fontanero y un albañil. Sabe que:

- En el 4.º A el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas y tuvieron que pagar 78 € de mano de obra.
- En el 3.º D pagaron 85 € por las 2 horas que estuvo el fontanero y la hora que estuvo el albañil.
- En mi casa estuvieron 1 hora el fontanero, 1 hora el electricista y 3 horas el albañil y nos cobraron 133 €.

¿Cuánto cobra por hora cada profesional?

Sean x, y, z los precios por hora de trabajo del electricista, el fontanero y el albañil, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=78 \\ 2y+z=85 \\ x+y+3z=133 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ x+2z=78 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ -y-z=-55 \end{array}\right\}$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ y=30 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=28 \\ y=30 \\ z=25 \end{array}\right.$$

El electricista cobra 28 €, el fontanero 30 € y el albañil 25 €.

096 Tengo ahorradas 20 monedas por un valor total de 29,50 €. Hay cuatro veces más monedas de 2 € que de 1 €. También hay monedas de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas hay en total?

Sean x, y, z las monedas de 2 €, 1 € y 50 céntimos que tengo ahorradas, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 2x+y+0{,}5z=29{,}5 \\ x=4y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 20x+10y+5z=295 \\ x-4y=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 15x+5y=195 \\ x-4y=0 \end{array}\right\}$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 15x+5y=195 \\ 65y=195 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=12 \\ y=3 \\ z=5 \end{array}\right.$$

Hay 12 monedas de 2 €, 3 de 1 € y 5 de 50 céntimos.

097 **Pilar compra 200 acciones de la empresa *A*, 150 de *B* y 100 de *C* y paga 3.300 € mientras que Juan gasta 3.750 € por la compra de 50 acciones de *A*, 120 de *B* y 240 de *C*. Con estos datos, ¿es posible saber el precio de cada acción? ¿Y si cada acción tiene un precio entero comprendido entre 1 € y 12 €, ambos incluidos?**

Sean x, y, z los precios de las acciones de las empresas *A*, *B* y *C*, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 200x+150y+100z=3.300 \\ 50x+120y+240z=3.750 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 200 & 150 \\ 50 & 120 \end{vmatrix} = 16.500 \neq 0$$

Los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, como el sistema tiene 3 incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Es decir, el sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} 200x+150y+100z=3.300 \\ 50x+120y+240z=3.750 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=66 \\ 5x+12y+24z=375 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=66 \\ 33y+86z=1.170 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{16\lambda-111}{11} \\ y=\dfrac{1.170-86\lambda}{33} \\ z=\lambda \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Con los datos no es posible determinar los precios de las acciones.

Si las acciones tienen un precio entero, el valor de la acción de la empresa *C* solo puede ser de 9 €, así las acciones de la empresa *A* valen 3 € y las de *B* 12 €.

098 **El encargado de un almacén de electrodomésticos desea conocer lo que pesan un frigorífico y una lavadora. Como no tiene báscula requiere ciertas informaciones a otros empleados:**

- **Sr. Moreno: un frigorífico y una lavadora juntos pesan 120 kg.**
- **Sr. Arce: el otro día llevé en el camión 3 frigoríficos y 4 lavadoras. La camioneta vacía pesa 1.250 kg y con la carga pesaba 1.550 kg.**
- **Sr. Puente: yo llevé 4 frigoríficos y 5 lavadoras y todo pesaba 480 kg.**

Realiza los cálculos para determinar los pesos. ¿Qué sucede? Busca alguna explicación de esos resultados.

Sea x el peso de un frigorífico y sea y el de una lavadora.
Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ 3x+4y=1.550-1.250 \\ 4x+5y=480 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ 3x+4y=300 \\ 4x+5y=480 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 120 \\ 3 & 4 & 300 \\ 4 & 5 & 480 \end{vmatrix} = 60 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3 \neq \text{Rango } (A) = 2 \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

El sistema no tiene solución, por tanto los datos recogidos no pueden ser correctos.

099 **Cuando en el año 1800 Beethoven escribe su primera sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito Franz Schubert. Pasa el tiempo y es Schubert el que compone su célebre *Sinfonía Incompleta*. Entonces la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años después muere Beethoven y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenía Beethoven cuando compuso su primera sinfonía.**

Determinar el año de nacimiento de cada uno de estos dos compositores.

(Aragón. Junio 2004. Opción A. Cuestión 1)

Sean x e y los años de nacimiento de Beethoven y Schubert, respectivamente, y sea z el año en que se compuso la Sinfonía completa.
Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 1.800-x=10(1.800-y) \\ (z-y)+(z-x)=77 \\ z+5-y=1.800-x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+10y=16.200 \\ -x-y+2z=77 \\ x-y+z=1.795 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=1.795 \\ -x-y+2z=77 \\ -x+10y=16.200 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=1.795 \\ -3x+y=-3.513 \\ -x+10y=16.200 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=1.795 \\ -3x+y=-3.513 \\ 29x=51.330 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1.770 \\ y=1.797 \\ z=1.822 \end{array}\right.$$

Así, Beethoven nació en el año 1770 y Schubert en el 1797.

100 La liga de fútbol de un cierto país la juegan 21 equipos a doble vuelta. Este año, los partidos ganados valían 3 puntos, los empatados 1 punto y los perdidos 0 puntos. En estas condiciones, el equipo campeón de liga obtuvo 70 puntos.

Hasta el año pasado los partidos ganados valían 2 puntos y el resto, igual. Con el sistema antiguo, el actual campeón hubiera obtenido 50 puntos.

¿Cuántos partidos ganó, empató y perdió el equipo campeón?

(Aragón. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 1)

Sean x, y, z los partidos ganados, empatados y perdidos por el equipo, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=40\\ 3x+y&=70\\ 2x+y&=50 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z&=40\\ 3x+y&=70\\ -x&=-20 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=20\\ y&=10\\ z&=10 \end{aligned}\right.$$

El equipo ganó 20 partidos, empató 10 y perdió otros 10.

101 Las edades, en años, de un niño, su padre y su abuelo verifican las siguientes condiciones:

- La edad del padre es α veces la de su hijo.
- El doble de la edad del abuelo más la edad del niño y más la del padre es de 182 años.
- El doble de la edad del niño más la del abuelo es 100.

a) Establece las edades de los tres suponiendo que $\alpha = 2$.

b) Para $\alpha = 3$, ¿qué ocurre con el problema planteado?

c) Siguiendo con $\alpha = 3$, ¿qué ocurre si en la segunda condición la suma es de 200 en vez de 182?

(Asturias. Junio 2004. Bloque 2)

Sean x, y, z las edades del niño, del padre y del abuelo, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} y&=\alpha x\\ 2z+x+y&=182\\ 2x+z&=100 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha x-y&=0\\ x+y+2z&=182\\ 2x+z&=100 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+2z&=182\\ \alpha x-y&=0\\ 2x+z&=100 \end{aligned}\right\}$$

a) Si $\alpha = 2 \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 182 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 100 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 18 \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 182 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 2 & 100 & 1 \end{vmatrix} = 36 \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 182\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 100 \end{vmatrix} = 64$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 18 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = 36 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 64$$

El hijo tiene 18 años, el padre 36 y el abuelo 64.

b) Si $\alpha = 3 \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 182 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 100 \end{vmatrix} = -36 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3 \neq \text{Rango } (A) = 2$

Sistema incompatible

c) $\left.\begin{array}{r} y = 3x \\ 2z + x + y = 200 \\ 2x + z = 100 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - y = 0 \\ x + y + 2z = 200 \\ 2x + z = 100 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 200 \\ 3x - y = 0 \\ 2x + z = 100 \end{array}\right\}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 100 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 2 = \text{Rango } (A) < \text{n.º de incógnitas}$

Sistema compatible indeterminado

102 **En una caja hay monedas de tres tipos: de 2 €, de 1 € y de 50 céntimos.**

Se sabe que, en total, hay 33 monedas y el valor conjunto de todas ellas es de 40 €. ¿Se puede determinar el número de cada tipo de monedas?

Si la respuesta es afirmativa, encuentra el número de cada uno de los tipos de moneda.

Si la respuesta es negativa, encuentra, al menos, dos conjuntos diferentes de 33 monedas de los tipos descritos y de manera que el valor total sea de 40.

(País Vasco. Junio 2002. Bloque E. Cuestión E)

Sean x, y, z el número de monedas de 2 €, 1 € y 50 céntimos que hay en la caja, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 33 \\ 2x + y + 0{,}5z = 40 \end{array}\right\}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, como el sistema tiene 3 incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Es decir, el sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 33 \\ 2x + y + 0{,}5z = 40 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 33 \\ -x + 0{,}5z = -7 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 7 + 0{,}5\lambda \\ y = 26 - 1{,}5\lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Respuesta abierta: dos soluciones posibles son 8 monedas de 2 €, 23 de 1 € y 2 de 50 céntimos, o bien, 9 monedas de 2 €, 20 de 1 € y 4 de 50 céntimos.

103 De tres números, x, y, z, sabemos lo siguiente: que el primero más el segundo suman 0; que el primero más el tercero suman 1; que la suma de los tres es 0 y, para terminar, que el primero multiplicado por un número k más el doble de la suma del segundo y el tercero da 1.

a) ¿Qué puede decirse del valor de k?

b) ¿Cuánto valen esos tres números?

(Cataluña. Año 2005. Serie 4. Problema 5)

$$\left.\begin{aligned} x+y&=0\\ x+z&=1\\ x+y+z&=0\\ kx+2(y+z)&=1\end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x+y&=0\\ x+z&=1\\ x+y+z&=0\\ kx+2y+2z&=1\end{aligned}\right\}$$

Considerando las tres primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=0\\ x+z&=1\\ z&=0\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x&=1\\ y&=-1\\ z&=0\end{aligned}\right.$$

Si sustituimos en la última ecuación: $k-2=1 \to k=3$

Por tanto, si $k=3$ el sistema es compatible determinado y los números son: $1, -1$ y 0

Si $k \neq 3$ el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

104 En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- Alimento Migato: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura.
- Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura.
- Alimento Comecat: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura.

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

(C. Valenciana. Septiembre 2005. Ejercicio B. Problema 1)

Sean x, y, z los porcentajes de carne, pescado y verdura que se encuentran en los alimentos, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} 600x+300y+200z&=470\\ 300x+400y+600z&=370\\ 100x+300y+200z&=160\end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 60x+30y+20z&=47\\ 30x+40y+60z&=37\\ 5x+15y+10z&=8\end{aligned}\right\}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 60 & 30 & 20\\ 30 & 40 & 60\\ 5 & 15 & 10\end{vmatrix} = -25.000 \neq 0$$

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 47 & 30 & 20\\ 37 & 40 & 60\\ 8 & 15 & 10\end{vmatrix} = -15.500 \to x=\frac{|A_x|}{|A|}=0,62$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 60 & 47 & 20 \\ 30 & 37 & 60 \\ 5 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -5.500 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 0,22$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 60 & 30 & 47 \\ 30 & 40 & 37 \\ 5 & 15 & 8 \end{vmatrix} = -4.000 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0,16$$

Los porcentajes son: 62 %, 22 % y 16 %.

105 **Luis, Juan y Óscar son tres amigos. Luis le dice a Juan: Si te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad. Calcular lo que tiene cada uno ellos sabiendo que entre los tres reúnen 60 €.**

(Aragón. Junio 2003. Opción A. Cuestión 1)

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ \frac{x}{3} + y = x - \frac{x}{3} \\ \frac{x}{3} + y - z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 30 \\ y = 10 \\ z = 20 \end{array}\right.$$

106 **Un coleccionista decide regalar un montón de sellos. A cada persona con la que se encuentra le da la mitad de los sellos que llevaba más uno, y se encuentra exactamente con 6 personas. Si al final regala todos los sellos, ¿cuántos sellos tenía el coleccionista?**

(País Vasco. Julio 2007. Bloque E. Cuestión E)

Sea x el número de sellos que tenía el coleccionista.

A la primera persona le da: $\frac{x}{2} + 1$

A la segunda:

$$\left(x - \left(\frac{x}{2} + 1\right)\right) : 2 + 1 = \left(\frac{x}{2} - 1\right) : 2 + 1 = \frac{x}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

A la tercera:

$$\left(x - \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\right) : 2 + 1 = \left(x - \frac{3x}{4} - \frac{3}{2}\right) : 2 + 1 = \frac{x}{8} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{x}{8} + \frac{1}{4}$$

A la cuarta:

$$\left(x - \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{x}{8} + \frac{1}{4}\right)\right) : 2 + 1 = \left(x - \frac{7x}{8} - \frac{7}{4}\right) : 2 + 1 =$$
$$= \frac{x}{16} - \frac{7}{8} + 1 = \frac{x}{16} + \frac{1}{8}$$

A la quinta:

$$\left(x-\left(\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{1}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{8}\right)\right):2+1=\left(x-\frac{15x}{16}-\frac{15}{8}\right):2+1=$$

$$=\frac{x}{32}-\frac{15}{16}+1=\frac{x}{32}+\frac{1}{16}$$

A la sexta:

$$\left(x-\left(\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{1}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{8}+\frac{x}{32}+\frac{1}{16}\right)\right):2+1=$$

$$=\left(x-\frac{31x}{32}-\frac{31}{16}\right):2+1=\frac{x}{64}-\frac{31}{32}+1=\frac{x}{64}+\frac{1}{32}$$

Entonces:

$$\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{1}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{8}+\frac{x}{32}+\frac{1}{16}+\frac{x}{64}+\frac{1}{32}=x$$

$$\rightarrow \frac{63x}{64}+\frac{63}{32}=x \rightarrow 63x+126=64x \rightarrow x=126$$

107 **Julia y Pedro están hablando por teléfono para comprobar que los sistemas que han resuelto les dan los resultados. Solo hay uno donde los resultados son diferentes.**

Para Julia las soluciones de ese sistema son $x=\dfrac{\lambda+8}{7}$, $y=\dfrac{11\lambda+18}{7}$, $z=\lambda$, mientras que para Pedro son $x=\dfrac{\mu+10}{11}$, $y=\mu$, $z=\dfrac{7\mu-18}{11}$. Después de cerciorarse de que ambos han escrito el enunciado del problema de la misma manera, empiezan a pensar que quizás sean dos maneras diferentes de resolver el mismo sistema de ecuaciones. Decídelo tú.

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\lambda+8}{7} \\ y=\dfrac{11\lambda+18}{7} \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x=z+8 \\ 7y=11z+18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x-z=8 \\ 7y-11z=18 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\mu+10}{11} \\ y=\mu \\ z=\dfrac{7\mu-18}{11} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 11x=y+10 \\ 11z=7y-18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 11x-y=10 \\ 7y-11z=18 \end{array}\right\}$$

Si formamos un sistema con las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 7x-z=8 \\ 7y-11z=18 \\ 11x-y=10 \end{array}\right\}$$

comprobamos que ambas soluciones son correctas.

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $AP = PA$.

(Madrid. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 2)

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

$$AP = PA \rightarrow \left.\begin{array}{r} a+2c = a \\ b+2d = 2a+b \\ c = c \\ d = 2c+d \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = a \\ c = c \\ 0 = c \end{cases}$$

Las matrices P son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con $a,b \in \mathbb{R}$.

2 Resuelve: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(Andalucía. Junio 2006. Opción B. Ejercicio 3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{5}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{5}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, $B = (a \quad 2 \quad 3)$ y $C = (4 \quad 0 \quad 2)$.

a) Halle los valores x, y y z para los que A no tiene inversa.

b) Determine los valores de a para los que el sistema $BA = C$ tiene solución.

c) Resuelva el sistema anterior cuando sea posible.

(Asturias. Junio 2008. Bloque 1)

a) A no tiene inversa si $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y\begin{vmatrix} x & y & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y(y - yz) = y^2(1 - z)$$

La inversa no existe si $y = 0$ o $z = 1$.

b) $$BA = C \rightarrow (a \quad 2 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix} = (4 \quad 0 \quad 2) \rightarrow \left.\begin{aligned} ax + 2y + 3 &= 4 \\ ay + 3z &= 0 \\ ax + 2y + 3z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} ax + 2y &= 1 \\ ay + 3z &= 0 \\ ax + 2y + 3z &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 3 & 0 \\ a & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a^2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3a + 6$$

- Si $a \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

c) Si $a \neq 0$:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 6 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{3a+6}{3a^2} = \frac{a+2}{a^2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3a \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = -\frac{3a}{3a^2} = -\frac{1}{a}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 2 & 2 \end{vmatrix} = a^2 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

4 Se considera el sistema $\left.\begin{aligned} x - y + z &= -1 \\ y + z &= 2a \\ x + 2z &= a^2 \end{aligned}\right\}$ donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor de a.

b) Resolver el sistema para $a = 0$.

c) Resolver el sistema para $a = 1$.

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Problema 1)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & 2 & a^2 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\,(A) = 2$

- Si $a \neq 1 \rightarrow \text{Rango}\,(A^*) = 3 \neq \text{Rango}\,(A) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 1 \rightarrow \text{Rango}\,(A) = \text{Rango}\,(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

b) Para $a = 0 \rightarrow$ El sistema es incompatible, no tiene solución.

c) Para $a = 1$ consideramos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= -1 - z \\ y &= 2 - z \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} z &= 1 - 2\lambda \\ y &= 2 - \lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

5 Dado el sistema dependiente del parámetro α: $\left.\begin{aligned} \alpha x + y + z &= 1 \\ x + \alpha y + z &= 1 \\ x + y + \alpha z &= 1 \end{aligned}\right\}$

Se pide:

a) Determinar, razonadamente, los valores de α para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

b) Resolver el sistema cuando es compatible determinado.

c) Obtener, razonadamente, la solución del sistema cuando $\alpha = 0$.

(C. Valenciana. Junio 2008. Bloque 1. Problema 1)

a) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ \alpha+2 & \alpha & 1 \\ \alpha+2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+2)(\alpha-1)^2$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \to$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $\alpha = -2 \to$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \to$ Sistema incompatible
- Si $\alpha = 1 \to$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

b) Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \to |A| = (\alpha+2)(\alpha-1)^2$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \to x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \to y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \to z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

c) Si $\alpha = 0 \to x = y = z = \dfrac{1}{2}$

6 **Cierto país importa 21.000 vehículos de tres marcas *A*, *B* y *C* al precio de 10.000, 15.000 y 20.000 € respectivamente. El total de la importación asciende a 332 millones de euros. Se ha observado que también hay 21.000 vehículos contando solamente los de la marca *B* y α veces los de la *A*.**

a) Plantea un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema en función del número de vehículos de cada marca.

b) Establece el número de vehículos de cada marca suponiendo $\alpha = 3$.

c) Estudia si existe algún valor α para el cual la situación no pueda darse en el campo de los números reales.

(Asturias. Junio 2007. Bloque 2)

a) Sean x, y, z los vehículos de cada marca. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 21.000 \\ 10.000x + 15.000y + 20.000z = 332.000.000 \\ \alpha x + y = 21.000 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 15y + 20z = 332.000 \\ \alpha x + y = 21.000 \end{array}\right\}$$

b) Si $\alpha = 3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 15y + 20z = 332.000 \\ 3x + y = 21.000 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 5y = 88.000 \\ 3x + y = 21.000 \end{array}\right\}$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 5y = 88.000 \\ 5x = 17.000 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3.400 \\ y = 10.800 \\ z = 6.800 \end{array}\right.$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21.000 \\ 10 & 15 & 20 & 332.000 \\ \alpha & 1 & 0 & 21.000 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5\alpha - 10 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 21.000 \\ 10 & 15 & 332.000 \\ \alpha & 1 & 21.000 \end{vmatrix} = 17.000\alpha - 17.000$

Si $\alpha = 2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible