

SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

- a) La solución es $x=2, y=1$.
- b) La solución es $x=3, y=-2, z=0$.
- c) El sistema es incompatible.
- d) Las soluciones son: $x=5-7t, y=-2+5t, z=t$ con $t \in \mathbb{R}$.
- e) El sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x=t, y=2t-3$ con $t \in \mathbb{R}$.
- f) El sistema no tiene solución.

2. Queda así:

- a) Por ejemplo, la ecuación añadida para que el sistema sea incompatible es $3x+2z=5$.
- b) La ecuación añadida para que el sistema sea compatible indeterminado puede ser $3x+2z=2$.

3. Las soluciones en cada caso son:

a) Consideraremos cada uno de los casos:

- Si $a=1$, el sistema es compatible indeterminado.

Sus soluciones son: $x=1-t, y=t$ con $t \in \mathbb{R}$.

- Si $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado.

Sus soluciones son: $x = \frac{(a+1)(a^2+1)}{a^2+a+1}, y = \frac{a}{a^2+a+1}$

b) Consideraremos cada uno de los casos:

- Si $a=0$, el sistema es compatible indeterminado.

Sus soluciones son: $x=0, y=t$ con $t \in \mathbb{R}$.

- Si $a=2$, el sistema es compatible indeterminado.

Sus soluciones son: $x=2t, y=t$ con $t \in \mathbb{R}$.

- Si $a \notin \{0,2\}$, el sistema es compatible determinado.

Sus soluciones son: $x=0, y=0$.

c) Consideraremos cada uno de los casos:

- Si $a=1$, el sistema es compatible determinado. Sus soluciones son: $x=1, y=1$.
- Si $a=-8$, el sistema es compatible determinado. Sus soluciones son: $x=10, y=28$.
- Si $a \notin \{1,-8\}$, el sistema es incompatible.

4. Queda:

- a) Si $m=-1$, el sistema es incompatible.
- b) Si $m=1$, el sistema es compatible indeterminado.
- c) Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$, el sistema es compatible determinado.
- d) El valor de m es $-\frac{4}{3}$.

5. Queda:

- a) Si $m \neq 2$ y $m \neq -1$, el sistema es compatible determinado.
- b) Si $m=2$, el sistema es compatible indeterminado.
- c) Si $m=-1$, el sistema es incompatible.

6. Para cualquier valor de k el sistema tiene solución única.

Ésta es:

$$x = 2 - k/4, \quad y = 3 + k/4, \quad z = -1 + k/4.$$

7. Queda del siguiente modo:

- Si $a=-1$, el sistema es incompatible.
- Si $a \neq -1$, el sistema es compatible determinado.
- Para $a=1$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones son: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 0$.

8. Queda:

- Si $a \neq 6$, el sistema es incompatible.
- Si $a=6$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones son: $x=5$, $y=4$, $z=2$.

9. Queda:

- a) Si $b \neq 0$ y $b \neq 1$, el sistema es compatible determinado.
Si $b=0$, el sistema es incompatible.
Si $b=1$, el sistema es compatible indeterminado.
- b) Si $b=1$, resolviendo se obtiene $x=-5t$, $y=1$, $z=t$ con $t \in \mathbb{R}$.

■ 10. Dado el sistema homogéneo
$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + kz = 0 \\ x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

- a) Indica para qué valores de k admite solución distinta de la trivial.
- b) Resuélvelo para un valor k que lo haga compatible indeterminado.

■ 11. Discute y resuelve, según los valores de m , los sistemas:

a)
$$\begin{cases} mx + 2y + z = 0 \\ 4x + 2my + mz = 0 \\ 2x + (2m - 2)y + z = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 5x - my + 3z = 0 \end{cases}$$

■ 12. Elimina los parámetros que intervienen en los sistemas siguientes:

a)
$$\begin{cases} x = 2m + n \\ y = -m + n \\ z = 3m - 2n \\ t = m + n \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x = p + q \\ y = q + r \\ z = p + r \\ t = 2p - 3r \\ u = p + q + r \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x = 1 + p + q \\ y = -p + 2q \\ z = 2 + 2p + 3q \\ t = -1 + 2p \\ u = 3 - q \end{cases}$$

■ 13. Un determinado concesionario de coches tiene abiertas tres sucursales. El número total de coches vendidos a final de mes entre las tres es 177, pero los vendidos en la tercera sucursal son la cuarta parte de los vendidos en la primera. Además, la diferencia entre el número de coches vendidos en la primera y la segunda es inferior en dos unidades al doble de los vendidos en la tercera. ¿Cuántos coches ha vendido en ese mes cada una de las sucursales?

■ 14. ¿Existen tres números tales que dados dos cualesquiera de ellos su suma es el otro más uno? En caso afirmativo, hálloslos.

■ 15. En un jardín hay veintidós árboles entre naranjos, limoneros y pomelos. El doble del número de limoneros más el triple del número de pomelos es igual al doble del número de naranjos.

- a) ¿Es posible saber con estos datos el número de naranjos que hay?
- b) Si además se sabe que el número de naranjos es el doble del de limoneros, ¿cuántos árboles hay de cada tipo?



■ 16. Dada la ecuación $2x + 3y - z = 1$:

- a) Añade dos ecuaciones para que el sistema resultante tenga una única solución.
- b) Añade dos ecuaciones para que el sistema resultante no tenga solución.
- c) Añade una ecuación para que el sistema resultante tenga infinitas soluciones.

■ 17. Dado el sistema
$$\begin{cases} ax + y - z = z \\ x - ay - z = -x \\ 3x - 3y - z = -y \end{cases}$$
, estudia su compatibilidad según los valores del parámetro a y resuélvelo cuando sea posible.

SOLUCIONES

10. Queda del siguiente modo:

- a) Sólo para $k = \frac{7}{4}$, el sistema admite solución distinta de la trivial.
- b) Para el valor anterior las soluciones son: $x = \frac{5t}{4}$, $y = \frac{-11t}{4}$, $z = t$ con $t \in \mathbb{R}$.

11. Queda:

- a) Si $m \neq 2$ y $m \neq -2$, el sistema es compatible determinado y su solución es la trivial.
 Si $m = -2$, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x = 2t$, $y = t$, $z = 2t$ con $t \in \mathbb{R}$.
 Si $m = 2$, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x = t$, $y = u$, $z = -2t - 2u$ con $t, u \in \mathbb{R}$.
- b) Es un sistema homogéneo. Si $m \neq 5$, el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial.
 Si $m = 5$, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x = \frac{t}{5}$, $y = \frac{4t}{5}$, $z = t$ con $t \in \mathbb{R}$.

12. En cada caso queda:

Eliminando los parámetros, se obtiene:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 7y - 3z = 0 \\ 2x + y - 3t = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x - 5y - z - 2t = 0 \\ x + y + z - 2u = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 7x + y - 3z = 1 \\ 4x - 2y - 3t = 7 \\ 2x - t + 2u = 9 \end{cases}$$

13. El sistema se plantea del siguiente modo:

Llamamos x , y , z al número de coches vendidos cada día en una sucursal, las condiciones del enunciado nos permiten plantear el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 177 \\ z = \frac{1}{4}x \\ x - y = 2z - 2 \end{cases}$$

Expresado el sistema y aplicando el método de Gauss en la resolución obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 177 \\ x - 4z = 0 \\ x - y - 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 177 \\ y + 5z = 177 \\ 2y + 3z = 179 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 177 \\ y + 5z = 177 \\ 7z = 175 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 52 \\ z = 25 \end{cases}$$

Por tanto, la primera sucursal vendió 100 coches, la segunda 52 y la tercera 25.

14. El sistema se plantea del siguiente modo:

Llamamos x , y , z a los números buscados. Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = z + 1 \\ x + z = y + 1 \\ y + z = x + 1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Los tres números son $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

15. Queda del siguiente modo:

- a) Llamamos n al número de naranjos, l al número de limoneros y p al número de pomelos. Las condiciones del enunciado nos permiten formular el sistema:

$$\begin{cases} n + l + p = 22 \\ 2n - 2l - 3p = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene dos soluciones: $n=12, l=6, p=4$ y $n=13, l=8, p=1$. No consideramos la solución $n=11, l=11, p=0$. Existen otras soluciones del sistema cuyos valores no son números naturales. Por tanto, no podemos saber el número de naranjos que hay.

- b) Con la tercera solución planteamos y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} n + l + p = 22 \\ 2n - 2l - 3p = 0 \\ n - 2l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + l + p = 22 \\ 4l + 5p = 44 \\ 3l + p = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + l + p = 22 \\ 4l + 5p = 44 \\ 11p = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 \\ l = 6 \\ p = 4 \end{cases}$$

Los árboles del jardín son 12 naranjos, 6 limoneros y 4 pomelos.

16. Queda del siguiente modo:

- a) Este apartado admite una respuesta abierta a múltiples soluciones. Una de ellas puede ser:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 2z = 8 \\ -3x + y + 2z = 6 \end{cases} \text{ con solución } x=1, y=1, z=4.$$

- b) Como ocurre en el caso anterior un ejemplo podría ser:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 2z = 8 \\ 3x + 2y + z = 15 \end{cases}$$

- c) En este caso:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 2z = 8 \\ 3x + 2y + z = 9 \end{cases} \text{ las infinitas solución pueden venir dadas en la forma: } x = 5 - t, y = -3 + t, z = t \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

17. La solución es:

El sistema del enunciado es el sistema homogéneo

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ -2x + ay + z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ -2 & a & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 8a + 7$$

El estudio a realizar es:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 7$, el rango de la matriz A es 3, el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial.
- Si $a=1$, el rango de la matriz A es 2, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x=t, y=t, z=t$ con $t \in \mathbb{R}$.
- Si $a=7$, el rango de la matriz A es 2, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x=-5t, y=t, z=-17t$ con $t \in \mathbb{R}$.

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

- 18. Encuentra todas las soluciones del sistema siguiente según los valores del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

- 19. Discute, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3m \end{cases}$$

- 20. El señor García deja a sus hijos herederos de todo su dinero con las siguientes condiciones: al mayor le deja la media aritmética de lo que les deja a los otros dos más 30 000 €; al mediano, exactamente la media aritmética de lo que les deja a los otros dos; y al más pequeño, la media aritmética de lo de los otros dos menos 30 000 €. Conociendo estas condiciones solamente, ¿pueden los hijos saber cuánto dinero ha heredado cada uno?

- 21. Discute, según los valores de b , el sistema $\begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & b & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Resuélvelo encontrando la solución para $z = -3$.

- 22. Estudia, en función de los valores del parámetro k , el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + z = y \\ x + 2y + kz = k \end{cases}$ y resuélvelo cuando sea compatible.

- 23. Elimina los parámetros a y b en el sistema $\begin{cases} x + y = 3a + 3 \\ 2x + y - z = 3a + 3b + 1 \\ x - 2y + z = -2a + 5b - 8 \end{cases}$

- 24. Discute, según los valores del parámetro m , el sistema $\begin{cases} x - y = m \\ x + m^2z = 2m + 1 \\ x - y + (m^2 - m)z = 2m \end{cases}$

Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

- 25. Determina para qué valores del parámetro a el sistema $\begin{cases} ax + y + a^2z = 3 \\ -x - 7y + 8z = 0 \\ x + a^3y + a^2z = -3 \end{cases}$ admite como solución $x = 1, y = 1, z = 1$,

y resuélvelo en estos casos, comprobando que, efectivamente, $x = 1, y = 1, z = 1$ es solución del sistema. Razona la respuesta.

- 26. Dado el sistema $\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}$, discútelo en función de a y resuélvelo para $a = -5$.



SOLUCIONES

18. En este caso queda del siguiente modo:

Para cualquier valor que tome el parámetro a , el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son las siguientes: $x=1-t$, $y=(1-2a)t$, $z=2t$ con $t \in \mathbb{R}$.

19. La discusión queda:

- Si $m \neq 2$, el sistema es incompatible.
- Si $m = 2$, el sistema es compatible determinado.

20. Queda:

Llamando M lo que recibe el hijo mayor, m el mediano y p el pequeño e imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 2M - m - p = 60000 \\ M - 2m + p = 0 \\ M + m - 2p = 60000 \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado por lo que no podemos saber lo que deja a cada uno de los hijos con estas condiciones.

21. Queda:

Este sistema es homogéneo. La discusión quedaría:

- Si $b \neq -3$ y $b \neq -1$, el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial.
- Si $b = -3$, el sistema es compatible indeterminado y la solución en la que $z = -3$ es la siguiente: $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, $z = -3$.
- Si $b = -1$, la $z = 0$ por lo que no hay ninguna solución que verifique el enunciado.

22. La solución es:

Este sistema es no homogéneo. La discusión quedaría:

- Si $k = 7$, el sistema es incompatible.
- Si $k \neq 7$, el sistema es compatible determinado y su solución es:

$$x = \frac{-3k}{k-7}, \quad y = \frac{-2k}{k-7}, \quad z = \frac{k}{k-7}$$

23. La solución es:

Debe cumplirse que

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & x+y-3 \\ 3 & 3 & 2x+y-z-1 \\ -2 & 5 & x-2y+z+8 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y simplificando se obtiene: $y-2z=2$

24. La discusión queda:

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, el sistema es compatible determinado.
- Si $m=1$, el sistema es incompatible.
- Si $m=0$, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x=1, y=1, z=t$ con $t \in \mathbb{R}$.

25. La solución queda:

Sustituyendo $x=1, y=1, z=1$ en el sistema, el parámetro debe cumplir:

$$\begin{cases} a+1+a^2=3 \\ 1+a^3+a^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-2=0 \\ a^3+a^2+4=0 \end{cases}$$

Las soluciones de la primera ecuación son: $a=1$ y $a=-2$, solamente $a=-2$ cumple la segunda ecuación.

Por tanto, para $a=-2$ el sistema admite como solución $x=1, y=1, z=1$. Veamos que es cierto:

Para $a=-2$ el sistema queda:
$$\begin{cases} -2x + y + 4z = 3 \\ -x - 7y + 8z = 0 \\ x - 8y + 4z = -3 \end{cases}$$

El rango de la matriz A es 2 ya que
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 8 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

y
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} \neq 0.$$

El rango de la matriz A^* es 2 ya que
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & -7 & 0 \\ 1 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

El sistema es compatible indeterminado, se reduce a

$$\begin{cases} -2x + y = 3 - 4z \\ x + 7y = 8z \end{cases}$$

y sus soluciones son:

$$x = \frac{36z - 21}{15} \quad y = \frac{12z + 3}{15} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12t - 7}{5} \\ y = \frac{4t + 1}{5} \\ z = t; t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Obsérvese que la solución que se cita en el enunciado, $x = 1, y = 1, z = 1$, se obtiene para $t = 1$.

26. Queda del siguiente modo:

Hallando el determinante de la matriz ampliada obtenemos la expresión $18a - a^3 - 35$ y resolviendo la ecuación $18a - a^3 - 35 = 0$ obtenemos la solución real $a = -5$.

La discusión del sistema es:

Si $a = -5$ el sistema es compatible determinado y en caso contrario es incompatible. Por tanto, para este valor puede resolverse obteniéndose como solución $x = -1, y = -1$.